CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

UNIOESTE - Campus de Cascavel

ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ

CLEISON RIBEIRO SOTEL

WILLIAM FELIPE PINHEIRO

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL

2022

ANDRÉ LUIZ ZANIN DA CRUZ
CLEISON RIBEIRO SOTEL
WILLIAM FELIPE PINHEIRO

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.
Orientadora: Profª. Arleni Elise Sella Langer

CASCAVEL
2022

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus que nos ajudou a superar nossos obstáculos no caminho do profissional da educação. Em seguida, agradecemos a nossa orientadora Arleni Elise Sella Langer por ter orientado nosso grupo durante todo o projeto do PROMAT, que disponibilizou sua atenção na organização dos conteúdos trabalhados, respondendo nossas dúvidas, nos incentivando, na correção e orientação planos e do seguimento das aulas.

Agradecemos a professora Pamela Gonçalves, que também nos orientou em diversos encontros do projeto, indicando nossos defeitos e a aperfeiçoar nosso ensino durante algumas aulas. A professora Andréia Büttner Ciani que também nos orientou no oitavo encontro do PROMAT.

Queremos também agradecer ao Colégio Olinda Truffa de Carvalho por permitir que apresentássemos nosso projeto do Dia Nacional da Matemática, no dia 06 de maio para turmas da manhã e da tarde.

Finalizando, agradecemos a nossa família, que este durante todo o estágio esteve nos apoiando para que tudo ocorresse como planejado.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

Sumário

1. Introdução

O trabalho em questão tem como objetivo apresentar o estágio supervisionado da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I, oferecido pela professora Me. Arleni Elise Sella Langer juntamente com a professora Priscila Friedemann Cardoso, realizado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná Unioeste, que se localiza na Rua Universitária, número 2069, bairro Jardim Universitário, do município de Cascavel-PR, tendo como atual reitor o Sr. Alexandre Almeida Webber.

Este estágio foi realizado de forma a oferecer aos alunos da rede pública de ensino, ensino médio e fundamental II, aulas de matemática com o foco em conteúdos matemáticos presentes em vestibulares e no ENEM, sendo ofertadas dez aulas onde foram trabalhados os seguintes conteúdos; Frações (operações), razão e proporção, radiciação, potenciação, conjuntos numéricos, polinômios, produtos notáveis, fatoração, equações, sistemas, introdução a função, função afim, função composta, funções com múltiplas sentenças, função quadrática, resolução equação do segundo grau, geometria de triângulos, polígonos e da circunferência, atualmente estas aulas oferecidas pelos alunos estagiários levam o nome de PROMAT.

Ainda para cumprir a carga horária do estágio realizamos uma atividade no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho, no dia seis de maio de 2022, onde cumprimos dez horas aulas, dia este que trabalhamos com turmas de sexto á nono ano do ensino fundamental. Nesta data foi apresentado uma contextualização para os alunos sobre o dia da matemática, e trabalhamos alguns jogos e uma situação problema, tais que estes jogos e o problema estavam presentes em alguns dos livros do professor Júlio César de Melo e Sousa (Malba Tahan), professor este que recebe este dia (06 de maio) como uma homenagem, por ter sido um professor de grande importância na história da educação matemática no Brasil.

2. **Promat 2022.**

O curso do PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática, é um projeto oferecido pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, desenvolvido pelo Colegiado do Curso de Licenciatura plena em Matemática, no Campus de Cascavel. É um curso é direcionado aos alunos do Ensino Médio que buscam futuramente a realização de algum vestibular ou concurso, mas também é oferecido vagas para pessoas interessadas em aprender Matemática, e a estudantes da própria universidade, especialmente aos estudantes do primeiro e segundo ano de graduação em Licenciatura em Matemática.

Esse curso ocorre na dependência da Universidade, sendo dividido em duas partes com dez encontros para cada. Na primeira parte são abordados conteúdos de matemática do Ensino Fundamental dos anos finais que mais estiveram presentes em vestibulares, principalmente no ENEM e no vestibular da UNIOESTE. Os responsáveis pelo aprendizado dos inscritos nessa parte serão os alunos licenciandos na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado I. Já na segunda parte são trabalhados com conteúdos de matemática do Ensino Médio, ministrada pelos estudantes da disciplina Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II.

Essas aulas foram pensadas e produzidas seguindo metodologias apropriadas, com definições, exemplos e atividades vindas de referenciais teóricos como livros didáticos, artigos da educação matemática, entre outros. Também são usados materiais confeccionados pelos próprios alunos da disciplina ou da própria universidade, e utilizando tecnologias para facilitar o aprendizado.

3. Artigo classe heterogêngia no ensino de matemática.

Estratégias para o ensino de matemática em classe heterogênea

Introdução

No decorrer do primeiro encontro do PROMAT - Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas, conseguimos notar que a turma que trabalhávamos se tratava de uma turma bem heterogênea, tanto em relação à faixa etária quanto ao conhecimento prévio de matemática escolar.

Enquanto alguns alunos mostravam facilidade em acompanhar as explicações e realizar as atividades, outros não conseguiam fazer na mesma velocidade, essa situação pode ser percebida em todos os encontros.

É frequente casos de professores trabalharem em turmas nas quais boa parte dos alunos não consegue acompanhar o desenvolvimento da matéria por não dominar os conteúdos dos anos anteriores. Em nosso caso, eram alunos do ensino médio que não haviam dominado completamente os conteúdos matemáticos dos anos finais do ensino fundamental. Nossa classe, era formada por alunos de diferentes lugares com contextos escolares distintos, alguns deles vindos de escolas públicas da região e outros de escolas privadas. Assim, pudemos observar que a trajetória escolar distinta também foi um fator para termos uma classe heterogênea em relação ao conhecimento matemático.

Considerando que nas últimas décadas, segundo Oliveira (2007), o Estado teve como objetivo a universalização da educação pública, conseguindo trazer diversos avanços como o aumento do número de vagas e a permanência dos estudantes no ensino fundamental, no entanto, não conseguiu atingir níveis desejáveis de aprendizagem, principalmente na matéria de Matemática. Logo, é sempre possível encontrar defasagens na aprendizagem em alunos de escolas públicas. Vieira (2013) afirma que,

> Como resultado de suas trajetórias de vida e escolares, tais educandos tendem a se tornar adolescentes que acumulam grandes defasagens de aprendizado nos anos finais do ensino fundamental. Ao considerar que as escolas públicas sejam constituídas por tantas diferenças, é natural concluir que as suas turmas reproduzam esse padrão. (VIEIRA, 2013, p. 23)

Diante da situação da pandemia do Coronavírus (COVID-19), o ensino da matemática que não é bem-visto por uma grande parte dos alunos, por conta da didática ditada pelos professores, ausência de aulas práticas e dinâmicas, o que acabou trazendo dificuldades na absorção dos conteúdos matemáticos por conta do ensino remoto. Assim, já esperávamos que nossos alunos do PROMAT apresentariam dificuldades com os conteúdos dos anos finais do ensino fundamental.

Por conta de o curso permitir a presença de alunos de diferentes anos do ensino médio e até da universidade, era importante que também buscássemos utilizar de práticas que desenvolvessem a interação e a cooperação entre discentes de diferentes idades. Segundo Katz (1990, *apud* SALES, p. 33), grupos heterogêneos em termos etários são grupos de estudantes com pelo menos um ano de diferença entre si.

Diante do desafio de ensinar alunos de diferentes idades e distintos níveis de conhecimentos matemáticos, decidimos usar como estratégias o trabalho em grupo e o recurso à monitoria durante nossos encontros. Utilizamos a Metodologia de resolução de problemas em introduções de conteúdos, com o objetivo de verificar o nível de conhecimento sobre o assunto da sala e tornar os alunos protagonistas e construtores do próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Logo abaixo, apresentamos o motivo de usarmos essas estratégias.

Trabalho em grupos e recurso à monitoria em classe heterogênea

Em uma pesquisa realizada por Vieira (2014), com oito professores da cidade de Belo Horizonte sobre como lidavam com a heterogeneidade em suas turmas, os docentes expuseram um conjunto de ações sequenciais, planejadas com o objetivo de solucionar situações especificas de aprendizagem, esse conjunto é chamado de *estratégia docente*, estabelecido por Torres e Barrios, em 2002. Segundo Torres e Barrios (2002), as *estratégias docentes* permitem maior flexibilidade na reestruturação ou na estruturação de suas aulas, podendo ajudar o professor com a tomada de decisões e na apresentação de novos conceitos de forma que seja abstraído pelos mais diversos alunos.

> A estratégia é, antes de tudo, um procedimento e, por conseguinte, uma atividade socioafetiva, através da qual relacionamos os meios com os fins. A estratégia não é um princípio nem uma atuação, mas um processo mental projetado sobre a prática, sobre os problemas que precisamos resolver. No sentido amplo, uma estratégia é a forma de proceder flexível e adaptativa, em que partimos das variáveis contextuais e alteramos o processo conforme essas variáveis se modifiquem. Isso pressupõe visões amplas ou de conjunto de todos os elementos e inclui tomar decisões pertinentes, isto é, adaptadas ao problema real (TORRE; BARRIOS, 2002, p. 94, apud VIEIRA, 2014, p. 7.)

A partir da entrevista com os oito docentes, Vieira destacou três aspectos centrais em suas estratégias, sendo elas: o respeito e a confiança do professor nas possibilidades do aluno; relações dialogais e participativas na sala de aula e a visão flexível da Matemática, trabalhada principalmente por meio da resolução de problemas.

Algumas das estratégias mais utilizadas por estes professores diante da ação da heterogeneidade do conhecimento matemático foi o trabalho em grupo na sala de aula e o recurso à monitoria. Com essas táticas, os discentes foram incentivados a resolverem problemas em grupos facilitando o atendimento de dúvidas pelo professor e a troca de informações. Aqueles que já possuíssem um domínio maior do conteúdo eram encorajados a auxiliar seus colegas. Os docentes que utilizavam desses recursos, afirmam que as explicações de um colega a outro eram mais pontuais e com uma linguagem mais próxima do cotidiano. Os alunos que ensinavam também estariam desenvolvendo e fortalecendo seus próprios conhecimentos.

Segundo Machado, em trabalhos colaborativos os alunos “podem interagir dialogicamente, construindo representações sociais mais dinâmicas e positivas em relação à matemática, passando a vê-la como uma forma de conhecimento e não apenas com uma disciplina (2012, p.134)”. Conhecendo essas táticas, vamos agora comentar como foram suas aplicações durante nossos encontros no PROMAT.

Utilização dessas estratégias durante os encontros no curso

Durante cada encontro do projeto em questão, organizamos as carteiras em grupos de quatro ou cinco lugares, assim desde o início os discentes conviviam em um ambiente que favorecia a interação entre eles. Buscamos sempre incentivá-los a se reunirem em grupos, mas respeitando sempre a decisão daqueles que não queriam. Ao estarem em grupo, os alunos mostravam um melhor desempenho na realização das tarefas por conta da troca de informações do que em comparação aos alunos que estavam sozinhos.

> A composição etária do grupo pode depender de uma opção pedagógica, benefícios de um grupo com idades próximas ou diversas; das condições do jardim de infância, existência de uma ou duas salas; dos critérios de prioridade de admissão utilizados por cada instituição ou, ainda, das características demográficas, pequenas povoações ou população dispersa. Sabe-se, no entanto, que a interação entre crianças em momentos diferentes é facilitadora do desenvolvimento e da aprendizagem. Para isso, torna-se importante o trabalho entre pares e em pequenos grupos, em que as crianças têm oportunidade de confrontar os seus pontos de vista e de colaborar na

> resolução de problemas ou dificuldades colocadas por uma tarefa comum. (PORTUGAL,1997, p.35. *apud* SALES, 2019, p. 32).

Nos grupos formados por afinidade era sempre possível encontrar alunos mais novos sendo auxiliados pelos colegas de classe mais velhos e o inverso também ocorria. A exemplo, podemos citar o caso do aluno do primeiro ano do ensino médio que durante todos os encontros, mostrava dificuldades em aplicar o conteúdo aprendido, mas que era auxiliado por nós e pelo aluno do terceiro ano do ensino médio que se sentava ao seu lado. Assim observamos a colaboração entre os discentes que concluíam com êxodo as atividades propostas mesmo tendo dificuldades no início.

Segundo Katz (1995, *apud* Sales, ano,p. 33), estudantes mais novos veem os mais velhos como detentores de mais experiência sobre qualquer assunto, com a capacidade para as ajudar e um modelo para se seguir. Já os estudantes mais velhos, veem os mais novos como quem precisa de ajuda. Se os mais velhos estiverem dispostos a ajudar, essa cooperação pode se tornar benéfica para o grupo e para o docente. Com os discentes mais velhos, os mais novos podem conhecer modelos de comportamento sociais positivos que eles irão assumir futuramente.

Ainda a mesma autora, afirma que a nível intelectual, nessa relação entre os alunos num grupo heterogêneo, os alunos serão capazes de ajustar a sua comunicação, ao nível do comprimento e complexidade das frases, à idade do ouvinte.

Considerações finais

Este artigo trouxe considerações acerca da classe que trabalhamos durante o projeto PROMAT, conseguimos notar as mais diversas diferenças entre os alunos participantes, buscamos trazer como foi o convívio e a interação da classe com os estagiários e colegas de classe. Considerando o contexto em que o projeto foi apresentado aos discentes, levando em consideração os comentários dos participantes, acreditamos que obtivemos um excelente resultado, levando em conta a heterogeneidade da classe, esperamos que os alunos levem a diante os conhecimentos adquiridos e possam contribuir para o sucesso pessoal e com sociedade.

Referências:

MACHADO, Ricardo; CÉSAR, Margarida. Trabalho colaborativo e representações sociais: Contributos para a promoção do sucesso escolar, em matemática. **Interacções**, ESE Santarém/Portugal, n. 20, pp. 98-140, 2012.

OLIVEIRA, Romualdo Portela de. **Da universalização do ensino fundamental ao desafio da qualidade:** uma análise histórica. Campinas, vol. 28, p. 661-690, out. 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/es/a/ry9DyPzZ5vqQrgGc4dcWDtG/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 28 maio 2022.

PORTUGAL, Ministério da Educação (1997). Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar. Lisboa.

SALES. Adriana Costa. **A cooperação como estratégia de aprendizagem em turmas heterogêneas,** Almada, Portugal, p. 104. Out. 2019. Disponível em: https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/33233/1/Adriana%20Costa%20Sales.pdf. Acesso em: 28 maio 2022.

VIEIRA, Glaucia Aparecida. **Estratégias docentes para o ensino de matemática em turmas heterogêneas**. 2014. 199p. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social, Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte, 2014.

VIEIRA. Glaucia Aparecida; ZAIDAN Samira. **Estratégias de ensino de matemática para turmas heterogêneas,** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Belo Horizonte, 2013; Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/download/8284/pdf. Acesso em: 28 maio 2022.

4. **Cronograma:**

Encontro	**Data**	**Conteúdos**
1	05/03	Dinâmica de apresentação. Frações (operações); Razão e proporção.
2	12/03	Radiciação; potenciação; conjuntos numéricos.
3	19/03	Polinômios; produtos notáveis e fatoração.
4	26/03	Equações; sistemas; Introdução a função.
5	02/04	Função afim; função composta; funções com múltiplas sentenças.
6 (assíncrono)		Revisão de todos os encontros.
7	23/04	Função quadrática; resolução equação do segundo grau.
8	30/04	Geometria: triângulos.
9	07/05	Geometria: polígonos.
10	14/05	Geometria: circunferência.

5. **Encontro 1: Plano de aula;**

1º Encontro - 05 de março de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Equivalência e simplificação de frações; Operações com frações; Porcentagem; Números decimais; Razão e proporção.

Objetivo geral: Compreender, relaciona porcentagem, conseguindo resolver os mais diversos problemas e cálculos envolvendo esses três.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Compreender a definição de frações, identificar seus tipos e reconhecer a relação que existe com os números decimais e a porcentagem;
- Efetuar cálculos com operações de frações, porcentagem e números decimais;
- Compreender e utilizar os conceitos de razão e proporção.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook,* Projetor*, Power Point* e Cartões do jogo.

Encaminhamento metodológico:

Essa aula será realizada com o auxílio de um projetor, no qual serão projetadas lâminas com as definições e exemplos presentes no texto abaixo. Para deixar essa aula mais dinâmica, os alunos serão organizados em grupos de 5 ou 6, e serão disponibilizadas duas folhas impressas com as definições e problemas, disponíveis em anexo II.

A primeira folha possui exemplos, definições e a primeira atividade introdutória. Já a segunda folha, frente e verso, possui outras definições, exemplos e a maioria dos problemas propostas para a aula. A primeira folha vai ser entregue no início da aula e a última folha será entregue após o intervalo.

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa e os diferentes métodos de resolução que utilizarem. Nessa aula, não será permitido o uso de calculadora, porque nos vestibulares seu uso também é restrito.

Enquanto a apresentação dos alunos ocorre, iremos passar uma folha com espaços pedindo o nome e o número para a formação de um grupo no *WhatsApp*.

Posteriormente a atividade introdutória e a explicação dos conteúdos de frações envolvidos, vai ser comentado o conteúdo de razão e proporção com grandezas diretamente e inversamente proporcionais, falando também da porcentagem e sua relação com frações.

No ensino da próxima aula sobre potenciação e radiciação, vai ser retomado os alguns aspectos dessa aula de fração, ao ver potenciação de números fracionários ou expoentes fracionários.

1° Apresentação do curso Promat e dos estagiários (10 min);

Nesse momento, vamos dar boas-vindas aos alunos, comentando que o Promat é um Projeto de Ensino Institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática que procura atender alunos da rede pública de ensino. O Promat é dividido em duas partes, ambas com o objetivo de ensinar os alunos que buscam acesso aos cursos superiores. Nessa primeira parte, o foco de estudo será os conteúdos do ensino fundamental, e na segunda parte com os conteúdos do ensino médios. Também vai ser transmitido alguns avisos e os conteúdos a serem trabalhados.

2° Dinâmica de apresentação dos alunos do Promat (30 min);

Vamos pedir que todos os alunos respondam as seguintes perguntas, “Qual é o seu nome?”, “Qual é a sua idade?”, “De que cidade você veio?”, “Qual o seu *hobby*?”, “Qual o curso ou faculdade você deseja fazer após concluir o ensino médio?”.

O objetivo dessas perguntas é melhorar nossa interação com os discentes. Enquanto essas perguntas estarão sendo feitas, vamos entregar um cartão amarrados a um barbante e uma folha, os cartões são para escreverem a maneira como querem ser chamados durante as aulas e a folha é para que escrevam o nome e o número de telefone para formação do grupo no *WhatsApp*, alunos que não quiserem, não serão obrigados a usar os cartões, dar informações e participar do grupo.

3° Atividade introdutória e revisão do conceito de frações (30 min);

Após essa apresentação daremos uma um problema inicial para introduzirmos o estudo sobre frações. Esse problema foi escolhido por ser inteiramente sobre frações, apresentando conceitos como frações próprias e improprias, simplificação e soma frações. Além disso, através do problema poderemos observar o nível do conhecimento prévio da sala sobre o assunto. Conforme resolveriam, os professores estariam atendendo as dúvidas nos grupos e orientando o desenvolvimento deles sem dar a resposta.

Atividade introdutória 1 (10 min)

(ENEM – 2009) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Figura 1: Figura Atividade 1 sobre músicas

Fonte: Enem 2009

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso com duas Semínimas ou uma Mínima ou quatro Colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras. Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com:

a) 24 fusas
b) 3 semínimas
c) 8 semínimas
d) 24 colcheias e 12 semínimas
e) 16 semínimas e 8 semicolcheias

Após o tempo de resolução, vamos convidar algum aluno para comentar a sua estratégia de resolução e perguntar se algum outro aluno teria seguido por um caminho diferente. Um tempo de 10 minutos será reservado para resolver essa questão.

Seguiremos com a apresentação do conteúdo de frações através das lâminas no PowerPoint. Essas informações também estarão na lista entregue no começo da aula. (10 minutos)

DEFINIÇÃO – Frações
Fração é um número que representa uma parte de algo inteiro, ou seja, uma quantidade de um todo maior. O conjunto numérico no qual as frações estão contidas é chamado de conjuntos dos números racionais e toda fração é expressa na forma $\frac{a}{b}$ com “a” sendo o numerador e “b” sendo o denominador, este último é diferente de zero.

Nesse momento, seria pedido a alguns alunos que dessem exemplos de frações que possuem valor numérico “maior que 1”, “menor que 1” e “maior que 1, como um número inteiro”, esses exemplos são para definir frações próprias, improprias e aparentes.

Fração própria, quando o denominador é maior que o numerador.
$\frac{1}{2}; \frac{16}{17}; \frac{3}{7}$
Frações impróprias, quando o numerador é maior que o denominador.
$\frac{3}{2}; \frac{5}{3}; -\frac{10}{2}; \frac{17}{11}$
Frações aparentes, quando o numerador é múltiplo do denominador.
$\frac{3}{3}; \frac{21}{7}; -\frac{5}{5}; \frac{88}{11}$

DEFINIÇÃO – Números racionais
O conjunto dos racionais é representado por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$ e seus números possuem a característica de poderem ser representados como números decimais ou frações de números inteiros, contanto que o denominador não seja zero.
Tipos de números que pertencem a esse conjunto.

a) Números inteiros: $-2; 0; 1; 5$ que podem ser vistos como $-\frac{2}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{15}{3}$
b) Números decimais exatos: $0{,}5 = \frac{1}{2}; 2{,}32 = \frac{232}{100};\ 1{,}2 = \frac{12}{10};$
c) Dizimas periódicas simples: $1{,}424242 \ldots = \frac{141}{99};$
d) Dizimas periódicas compostas: $1{,}028888 \ldots = \frac{463}{450};$

DEFINIÇÃO – Frações equivalentes e simplificação de frações.
Frações equivalentes são aquelas escritas de maneiras diferentes, mas que expressam o mesmo valor matemático. Elas representam a mesma parte de um todo e para determiná-las é necessário multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero.
Na simplificação de frações, dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero, até chegar em uma fração irredutível, quando não tem mais como simplificar.

Nessa parte, vamos pedir a alguns alunos que deem exemplos de frações e uma fração equivalente a essa escolhida. Também aproveitaríamos para explicar o processo de simplificação de uma fração até sua forma irredutível.

Exemplos	
a) $\frac{2}{3} = \frac{2*2}{3*2} = \frac{4}{6} = 0{,}666 \ldots$	d) $\frac{45}{5} = \frac{45\div 5}{5\div 5} = \frac{9}{1} = 9$
b) $\frac{5}{4} = \frac{5*4}{4*4} = \frac{20}{16} = 1{,}25$	e) $\frac{24}{81} = \frac{24\div 3}{81\div 3} = \frac{8}{27}$
c) $\frac{10}{16} = \frac{10*6}{16*6} = \frac{60}{96} = 0{,}625$	f) $\frac{12}{24} = \frac{12\div 12}{24\div 12} = \frac{1}{2}$

4° Jogo Stop de frações (30 min)

O jogo *Stop com frações* foi escolhido porque o aluno pode refletir sobre os caminhos possíveis para resolver cada fração e ajudar o grupo a vencer as rodadas.

Como é uma atividade em grupo, alunos que não possuem tanta afinidade com frações podem analisar e compreender as estratégias usadas pelos colegas de grupo ou pelos adversários. As operações com frações serão comentadas posteriormente, aqui objetivamos que os alunos usem seus conhecimentos prévios sobre operação com frações, frações equivalentes e simplificação de frações para realizar os cálculos.

Serão quatro rodadas e ao final de cada rodada um professor visitaria o grupo que falou “Stop” primeiro e verificará as respostas, se estiverem erradas o jogo continua e se estiverem certas, pulamos para a próxima rodada.

Um fato importante é que o resultado das operações deve estar na forma de fração irredutível, sendo necessário o uso de simplificação. O grupo que gritar “Stop” e suas respostas estiverem corretas, cada grupo vai receber bis como prêmio, e ao final das quatro rodadas, por participarem da atividade, todos irão ganhar um bombom de presente.

Modelo dos cartões para o jogo Stop com frações

Quadro 1: Cartões para o jogo Stop das frações

PRIMEIRA RODADA	SEGUNDA RODADA
a) $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=$ d) $\frac{3}{20}+\frac{9}{20}=$ b) $\frac{7}{5}+\frac{3}{5}=$ e) $\frac{4}{5}+1=$ c) $\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=$ f) $\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=$	a) $\frac{4}{14}-\frac{3}{14}=$ d) $\frac{1}{9}-\frac{9}{9}=$ b) $\frac{8}{5}-\frac{3}{6}=$ e) $\frac{1}{3}+\frac{8}{21}=$ c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=$ f) $\frac{5}{2}-\frac{1}{9}=$
TERCEIRA RODADA	**QUARTA RODADA**
a) $\frac{3}{10}*\frac{5}{10}=$ d) $\frac{3}{20}*4=$ b) $\frac{1}{5}*\frac{3}{5}=$ e) $\frac{2}{5}\div\frac{1}{3}=$ c) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=$ f) $\frac{5}{4}*\frac{0}{2}=$	a) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=$ d) $\frac{32}{20}\div\frac{9}{10}=$ b) $\frac{7}{5}\div\frac{3}{5}=$ e) $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}-1=$ c) $17\div\frac{3}{2}=$ f) $\frac{3}{10}\div\frac{1}{10}*\frac{1}{3}=$

Fonte: Autores 2022

Distribuiremos um tempo de 30 minutos para esse jogo, caso apresentem dúvidas sobre como realizar o cálculo com mais de uma operação na quarta rodada, seria momento de comentar a ordem de resolução das operações matemáticas.

5° Intervalo (20 min)

6° Operações com frações (20 min)

Nesse momento, vamos fazer a explicação das operações com frações. As definições serão apresentadas nas lâminas e os exemplos comentados e resolvidos no quadro. Vamos convidar alguns alunos para darem exemplos de operações com frações e as resolveríamos passo-a-passo.

DEFINIÇÃO – Operações com frações
Como a fração é um número, podemos trabalhar ela as operações básicas da matemática. Podemos somar, subtrair, multiplicar, dividir e futuramente trabalharemos com as operações de potenciação e radiciação de frações. Para realizar essas operações, devemos usar os conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações.

I. Adição de frações e Subtração de frações

Para encontrar a solução desta operação com fração, o primeiro passo é deixar os denominadores dos números fracionários envolvidos iguais, para isso usamos da fração equivalente. Caso já sejam iguais, só precisamos somar/subtração os numeradores.

Soma de denominadores iguais:

a) $\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=\frac{10}{5}$ b) $\frac{29}{7}+\frac{30}{7}=\frac{59}{7}$

Soma de denominadores diferentes

c) $\frac{4}{6}+\frac{5}{3}=\frac{4*1}{6*1}+\frac{5*2}{3*2}=\frac{4}{6}+\frac{10}{6}=\frac{14}{6}$ d) $\frac{15}{8}+\frac{23}{7}=\frac{15*7}{8*7}+\frac{23*8}{7*8}=\frac{105}{56}+\frac{184}{56}=\frac{289}{56}$

Para subtração é análogo:

a) $\frac{4}{6}-\frac{5}{3}=\frac{4*1}{6*1}-\frac{5*2}{3*2}=\frac{4}{6}-\frac{10}{6}=-1$ b) $\frac{9}{8}-\frac{10}{16}=\frac{9*2}{8*2}-\frac{8*1}{16*1}=\frac{18}{16}-\frac{8}{16}=\frac{5}{8}$

II. Multiplicação de frações

Na multiplicação, os denominadores envolvidos não precisam ser iguais. Tudo o que precisamos fazer é multiplicar um numerador pelo outro, e depois multiplicar o denominador pelo outro.

Multiplicação de frações:

a) $\frac{5}{6}*\frac{10}{3}=\frac{50}{18}$ b) $\frac{9}{8}*\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

III. Divisão de frações

A divisão é realizada por meio da troca de frações que podem ser divididas, mudando de posição o numerador pelo denominador e fazendo a multiplicação dos novos objetos da operação com frações.

Divisão de frações:

a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2}*\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$ b) $\frac{\frac{7}{8}}{3}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{1}}=\frac{7}{8}*\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$

7° Razão, proporção, grandezas diretamente, inversamente proporcionais e porcentagem. (60 min)

Essa atividade foi escolhida para introduzir o estudo de razão, proporção e da porcentagem. Vai ser disponibilizado 10 minutos para resolvam a atividade. Após o tempo estipulado, será pedido que dois grupos comentassem qual foi a estratégia usada na alternativa “a”, em seguida, outros dois grupos falariam para a alternativa “b”. Após seus comentários, presentamos a eles nossa resolução, enfatizando o uso da porcentagem em forma de fração. Um tempo de 10 minutos para realizar a resolução do exercício.

Atividade introdutória 2 (10 min)

Na alta temporada, um pacote para Foz do Iguaçu sai por R$ 1.400,00. Na baixa temporada, o mesmo pacote de viagem tem um desconto de 25%. Um casal e amigos decidem que querem contratar uma viagem para Foz do Iguaçu, para isso eles resolveram orçar os valores da viagem. Como a quantidade de pessoas passa da quantidade definida para o pacote, a companhia decide que o valor do pacote para eles será de 150% do valor, porém mantendo o desconto da baixa temporada.

a) Quanto será o custo desse pacote na alta temporada?
b) Quanto será o custo desse pacote na baixa temporada?

Dando seguimento a aula, vamos passar as definições de razão, proporção e porcentagem nas lâminas do Power Point, buscando a participação dos alunos através de exemplos. Reservamos um tempo de 20 minutos para a realização dessas explicações.

DEFINIÇÃO – Razão
A razão estabelece uma comparação entre duas grandezas, e esse conceito está ligado com o conceito de divisão. Dizemos que a razão entre os números C e D, é o quociente entre C e D, ou seja, $C \div D$ ou $\frac{C}{D}$. Para representar uma razão entre dois números de maneira correta, devemos montar a fração na ordem que são apresentados os dados.

DEFINÇÃO – Proporção

Proporção é a igualdade entre duas razões ou mais, então, essas razões assumem o mesmo valor. Representamos a proporção entre duas razões da seguinte forma: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Sendo A e D os chamados extremos (externos) e B e C os meios (internos). A proporção obedece a propriedade "O produto dos externos é igual ao produto dos meios", ou seja, A*D = B*C.
Através dessa propriedade no cálculo de proporções, quando temos três valores conhecidos e precisamos encontrar um quarto, realizamos essa multiplicação cruzada. Por esse motivo, o cálculo de proporções é chamado de regra de três.

DEFINIÇÃO – Grandezas diretamente e inversamente proporcionais
Grandezas é tudo aquilo que pode ser medido, contado. Podendo ter suas medidas aumentadas ou diminuída, como exemplos, temos o volume, o comprimento, o tempo, a capacidade, o custo, a produção, entre outros. Dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais (GDP) quando, o aumento de uma leva ao aumento dá outra. Duas grandezas são inversamente proporcionais (GIP) quando, o aumento de uma leva a redução da outra.

DEFINIÇÃO – Porcentagem
Representado pelo símbolo %, como seu próprio nome indica, porcentagem ou por cem, é a divisão de um número qualquer por 100. Ela pode ser representada na forma percentual 12%, forma fracionária $\frac{12}{100}$ e na forma decimal 0,12. Logo, porcentagem é uma razão de denominador 100.
Forma percentual para fracionária
a) $26\% = \frac{26}{100}$ b) $0{,}1\% = \frac{0{,}1}{100}$
Forma percentual para decimal
a) $14\% = \frac{14}{100} = 0{,}14$ b) $0{,}05\% = \frac{0{,}05}{100} = 0{,}0005$

Atividades sobre razão e proporção (20 MINUTOS)

1) Em uma granja, o frango passa por várias etapas, e em cada uma delas a quantidade de comida que ele recebe é diferente. Sabendo-se que o crescimento de um frango leva 40 dias e que são utilizados 8 610 kg para alimentar 12 300 frangos nesse período. Ainda nesse mesmo prazo, qual seria a quantidade de ração necessária para alimentar 20 000 frangos?

a) 20000 kg b) 17000 kg c) 16000 kg d) 15000 kg e) 14000 kg

2) (**ENEM – 2013**) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras e o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos. b) 360 tijolos. c) 400 tijolos. d) 480 tijolos. e) 600 tijolos.

3) Um automóvel desloca-se a 60 km/h e demora 5 horas para chegar a seu destino. Se o mesmo automóvel se desloca ao longo desse percurso a 100 km/h, quanto tempo levaria para completar esse mesmo percurso?

Tais atividades serão resolvidas em aula, pedindo para que os alunos que estiverem dispostos, apresentem a resolução em lousa, os estagiários observarão as resoluções e auxiliariam para estarem no caminho correto.

Avaliação:

Ocorrerá durante a aula. Avaliaremos o conhecimento de operações com frações no desempenho dos alunos no jogo Stop de frações. A avaliação sobre razão e proporção ocorrerá com a interação da sala nas explicações e na resolução das três atividades finais de razão e proporção. Caso restem dúvidas no final da aula, essas serão respondidas no próximo encontro. Como será o primeiro encontro, é natural ocorrer pouca interação, assim qualquer contribuição por parte dos estudantes será considerada.

Referências:

GOUVEIA, Rosimar. Regra de três simples e composta; **Toda matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/regra-de-tres-simples-e-composta/. Acesso em: 11 dez. 2021;

GRANDEZAS PROPORCIONAIS. **Só Matemática**. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2021. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/fundam/grandeza.php*. Acesso em: 11 dez. 2021.*

LUIZ, Robson. Fração; **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fracao.htm. Acesso em: 11 dez. 2021.

MENINO PENSANDO. Disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/menino-pensando_12847318.htm. Acesso em 19 de fev. de 2022.

OLIVEIRA, Naysa Crystine Nogueira. Razão e proporção; **Mundo educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/razao-proporcao.htm

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Números racionais; **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/numeros-racionais.htm. Acesso em 11 de dezembro de 2021.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI. Rodrigo. **Matemática essencial**. 9º ano. São Paulo: Scipione, 2018.

PROVAS ENEM. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acessado em: 11 dez. 2021.

QUESTÕES SOBRE FRAÇÃO. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/fracoes-e-numeros-decimais/questoes. Acessado em: 09 dez. 2021.

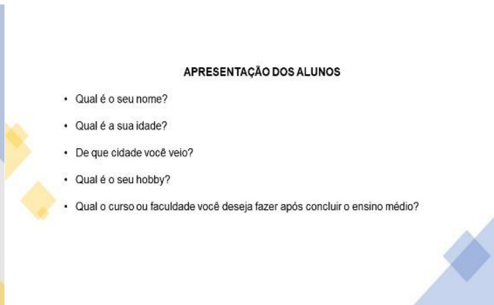
QUESTÕES SOBRE FRAÇÃO. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-fracoes/. Acessado em: 09 dez. 2021.

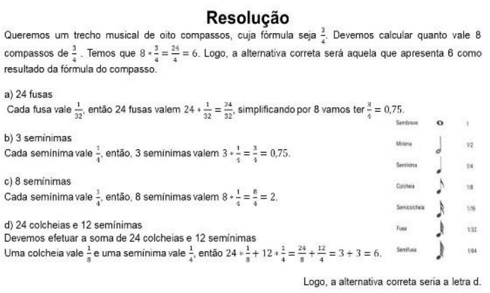
ROSA, Joseane. Frações equivalentes; **Educa mais Brasil**. Publicado em 30 maio 2021. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/fracoes-equivalentes. Acesso em: 11 dez. 2021.

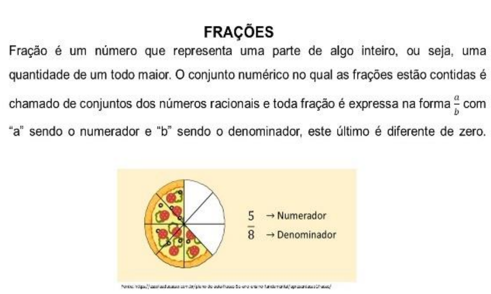
VESTIBULAR, Unioeste. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores/54659-vestibular-2020. Acesso em: 11 dez. 2021.

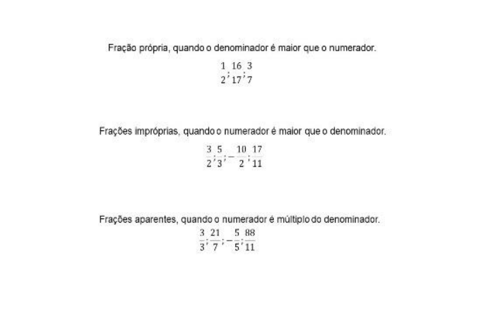
Apêndices:

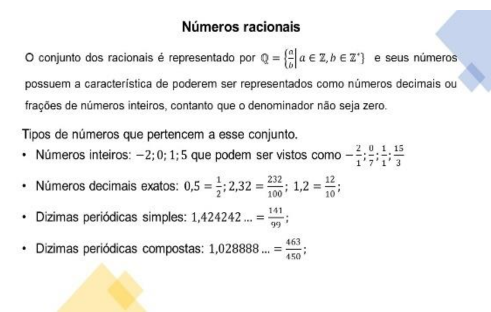
PRIMEIRA RODADA	SEGUNDA RODADA
a) $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=$ d) $\frac{3}{20}+\frac{9}{20}=$ b) $\frac{7}{5}+\frac{3}{5}=$ e) $\frac{4}{5}+1=$ c) $\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=$ f) $\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=$	a) $\frac{4}{14}-\frac{3}{14}=$ d) $\frac{1}{9}-\frac{9}{9}=$ b) $\frac{8}{5}-\frac{3}{6}=$ e) $\frac{1}{3}+\frac{8}{21}=$ c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=$ f) $\frac{5}{2}-\frac{1}{9}=$
TERCEIRA RODADA	**QUARTA RODADA**
a) $\frac{3}{10}*\frac{5}{10}=$ d) $\frac{3}{20}*4=$ b) $\frac{1}{5}*\frac{3}{5}=$ e) $\frac{2}{5}\div\frac{1}{3}=$ c) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=$ f) $\frac{5}{4}*\frac{0}{2}=$	a) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=$ d) $\frac{32}{20}\div\frac{9}{10}=$ b) $\frac{7}{5}\div\frac{3}{5}=$ e) $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}-1=$ c) $17\div\frac{3}{2}=$ f) $\frac{3}{10}\div\frac{1}{10}*\frac{1}{3}=$





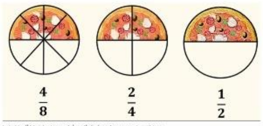






Frações equivalentes

Frações equivalentes são aquelas escritas de maneiras diferentes, mas, que expressam o mesmo valor matemático. Elas representam a mesma parte de um todo e, para determiná-las é necessário multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero.



Vocês conseguem nos dar alguns exemplos de frações equivalentes?

Exemplos:

Frações Equivalentes

a) $\frac{2}{3} = \frac{2*2}{3*2} = \frac{4}{6} = 0{,}666\ldots$

b) $\frac{5}{4} = \frac{5*4}{4*4} = \frac{20}{16} = 1{,}25$

c) $\frac{10}{16} = \frac{10*6}{16*6} = \frac{60}{96} = 0{,}625$

Simplificação de frações

Na simplificação de frações, dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero, até chegar em uma fração irredutível, quando não tem mais como simplificar.

Que tal nos darem alguns exemplos?

Exemplos:

Simplificação de Frações

d) $\frac{45}{5} = \frac{45 \div 5}{5 \div 5} = \frac{9}{1} = 9$

e) $\frac{24}{81} = \frac{24 \div 3}{81 \div 3} = \frac{8}{27}$

f) $\frac{12}{24} = \frac{12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{1}{2}$

Jogo *Stop* de frações (30 min)

- Junto de seu grupo, resolvam as frações de cada cartão o mais rápido possível.
- O grupo que terminar deve gritar "Stop" para que um professor vá verificar suas respostas.
- Se estiverem corretas seguiremos com a próxima rodada e cada integrante do grupo vai ganhar um prêmio; caso contrário, continuaremos a rodada.
- Todas as frações devem ser simplificadas para ficarem na forma de fração irredutível, sem mais possibilidade de simplificação.

PRIMEIRA RODADA

a) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} =$
b) $\frac{7}{5} + \frac{3}{5} =$
c) $\frac{21}{2} + \frac{3}{2} =$
d) $\frac{3}{20} + \frac{9}{20} =$
e) $\frac{4}{5} + 1 =$
f) $\frac{5}{4} + \frac{1}{2} =$

SEGUNDA RODADA

a) $\frac{4}{14} - \frac{3}{14} =$
b) $\frac{8}{5} - \frac{3}{6} =$
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} =$
d) $\frac{1}{9} - \frac{9}{9} =$
e) $\frac{1}{3} + \frac{8}{21} =$
f) $\frac{5}{2} - \frac{1}{9} =$

TERCEIRA RODADA

a) $\frac{3}{10} * \frac{5}{10} =$
b) $\frac{1}{5} * \frac{3}{5} =$
c) $\frac{1}{2} \div \frac{5}{2} =$
d) $\frac{3}{20} * 4 =$
e) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} =$
f) $\frac{5}{4} * \frac{0}{2} =$

QUARTA RODADA

a) $\frac{1}{2} \div \frac{5}{2} =$
b) $\frac{7}{5} \div \frac{3}{5} =$
c) $17 \div \frac{3}{2} =$
d) $\frac{32}{20} \div \frac{9}{10} =$
e) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - 1 =$
f) $\frac{3}{10} \div \frac{1}{10} * \frac{1}{3} =$

Operações com frações

Como a fração é um número, podemos trabalhar com ela as operações básicas da matemática. Podemos somar, subtrair, multiplicar, dividir e futuramente trabalharemos com as operações de potenciação e radiciação de frações. Para realizar essas operações, devemos usar os conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações.

I. Adição de frações e Subtração de frações

Para encontrar a solução destas operações com fração, o primeiro passo é deixar os denominadores dos números fracionários envolvidos iguais, para isso usamos a fração equivalente. Caso os denominadores já sejam iguais, só precisamos somar/subtração os numeradores.

II. Multiplicação de frações

Na multiplicação, os denominadores envolvidos não precisam ser iguais. Tudo o que precisamos fazer é multiplicar um numerador pelo outro, e multiplicar um denominador pelo outro.

III. Divisão de frações

A divisão é realizada por meio da troca de frações que podem ser divididas, mudando de posição o numerador com o denominador e fazendo a multiplicação das novas frações.

Atividade introdutória 2 (10 min)
Essa atividade está presente na folha entregue, leia ela atentamente e procure resolver!

Resolução

Alternativa A

$custo\ de\ viagem \quad porcentagem$

$1400 ------ 100$

$CA ------ 150$

$100 * CA = 1400 * 150$

$CA = \frac{210000}{100}$

$CA = 2100$

Alternativa B

$custo\ de\ viagem \quad porcentagem$

$2100 ------- 100$

$D ------ 25$

$100 * D = 2100 * 25$

$D = \frac{52500}{100}$

$D = 525$

$CB = CA - D$

$CB = 2100 - 525$

$CB = 1575$

Razão

A razão estabelece uma comparação entre duas grandezas, e esse conceito está ligado com o conceito de divisão. Dizemos que a razão entre os números C e D, é o quociente entre C e D, ou seja, $C \div D$ ou $\frac{C}{D}$. Para representar uma razão entre dois números de maneira correta, devemos montar a fração na ordem que são apresentados os dados.

Exemplos

a) A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é igual a pi.

$$\pi = \frac{comprimento\ da\ circunfência}{diâmetro}$$

b) A razão entre 5 e 10000.

$$\frac{5}{10000}$$

c) Velocidade é dada pela razão entre distância e tempo.

$$velocidade = \frac{distância}{tempo}$$

Proporção

É a igualdade entre duas ou mais razões, então, essas razões assumem o mesmo valor. Representamos a proporção entre duas razões da seguinte forma: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Sendo A e D os chamados extremos (externos) e B e C os meios (internos). A proporção obedece a propriedade "O produto dos extremos é igual ao produto dos meios", ou seja, A*D = B*C.

Por essa propriedade quando temos três valores conhecidos e precisamos encontrar um quarto, realizamos a multiplicação cruzada.

Por esse motivo, o cálculo de proporções é chamado de **regra de três**.(três valores conhecidos e um quarto que está sendo procurado)

Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Grandezas é tudo aquilo que pode ser medido, contado. Podendo ter suas medidas aumentadas ou diminuída. Como exemplos, temos o volume, o comprimento, o tempo, a capacidade, o custo, a produção, a idade, entre outros.

Dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais quando, o aumento de uma leva ao aumento dá outro. Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, o aumento de uma leva a redução da outra.

Vocês podem nos dar um exemplo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais ?

Exemplos:

GIP: Grandeza Velocidade vs Tempo

V (km/h)

Tempo (s)

GDP: Grandeza Velocidade vs distância

V (km/h)

d (metros)

Porcentagem

Representado pelo símbolo %, como seu próprio nome indica, porcentagem ou por cem, é a divisão de um número qualquer por 100. Ela pode ser representada na forma percentual 12%, forma fracionária $\frac{12}{100}$ e na forma decimal 0,12. Logo, porcentagem é uma razão de denominador 100.

Forma percentual para fracionária

a) $26\% = \frac{26}{100}$ b) $0{,}1\% = \frac{0{,}1}{100}$

Forma percentual para decimal

a) $14\% = \frac{14}{100} = 0{,}14$ b) $0{,}05\% = \frac{0{,}05}{100} = 0{,}0005$

Atividades sobre razão e proporção (20 MINUTOS)

Essas atividades estão presentes na folha entregue, leia cada uma atentamente e procure resolver!

Resolução

ATIVIDADE 1

O período proposto é de 40 dias, sendo entregue $8610\ kg$ de ração para 12300 frangos, e queremos descobrir a quantidade de quilogramas de ração será preciso para alimentar 20000 frangos, podemos resolver através da regra de três, já que conhecemos três valores e precisamos encontrar um quarto.

$Kg\ de\ ração \quad quantidade\ de\ frangos$

$8610 --------- 12300$

$x --------- 20000$

$12300x = 172200000$

$12300x \div 100 = 172200000 \div 100$

$123x = 1722000$

$x = 14000$

Logo, vai ser distribuído $14.000kg$ de ração que corresponde a alternativa E.

Resolução

ATIVIDADE 2

É preciso notar que existe uma razão entre a quantidade de telhas pela quantidade de tijolos, sendo $\frac{1500}{1200}$. Sabemos que 900 telhas já foram carregadas nesse caminhão, do total permitido 1500, podemos carregar ainda $1500 - 900 = 600$ telhas. Vamos encontrar o equivalente a essa quantidade de telhas em tijolos, através da proporção.

$$\begin{array}{cc} Telhas & Tijolos \end{array}$$

$$1500 ----1200$$

$$600 ---- x$$

$$1500x = 1200 * 600$$

$$1500x = 720000$$

$$1500x \div 100 = 720000 \div 100$$

$$15x = 7200$$

$$x = 480.$$

Logo, ele pode colocar em seu caminhão a quantidade de 480 tijolos, alternativa D

Resolução

ATIVIDADE 3

$$\begin{array}{cc} Km\ por\ hora & Tempo\ de\ chegada \\ 60 --------- & 5 \\ 100 --------- & x \end{array}$$

Se a velocidade do carro aumentou durante o percurso, é esperado que o tempo diminua. Assim, como um aumenta e o outro diminui, temos grandezas inversamente proporcionais.

Devemos inverter a ordem de uma das razões, ficando então:

$$\begin{array}{cc} Km\ por\ hora & Tempo\ de\ chegada \end{array}$$

$$60 ---------- x$$

$$100 --------- 5$$

$$100x = 60 * 5$$

$$100x = 300$$

$$x = 3$$

Logo, o tempo de chegada no destino será de 3 horas

5.1. **Resolução das atividades;**

Atividade introdutória 1

Queremos um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula seja $\frac{3}{4}$. Devemos calcular quanto valem 8 compassos de $\frac{3}{4}$. Temos que $8 * \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$. Logo, a alternativa correta será aquela que apresenta 6 como resultado da fórmula do compasso.

Alternativa a) 24 fusas

Cada fusa vale $\frac{1}{32}$, então 24 fusas valem $24 * \frac{1}{32} = \frac{24}{32}$, simplificando por 8 vamos ter $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Alternativa b) 3 semínimas

Cada semínima vale $\frac{1}{4}$, então, 3 semínimas valem $3 * \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Alternativa c) 8 semínimas

Cada semínima vale $\frac{1}{4}$, então, 8 semínimas valem $8 * \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Alternativa d) 24 colcheias e 12 semínimas

Na alternativa d, devemos efetuar a soma de 24 colcheias e 12 semínimas

Uma colcheia vale $\frac{1}{8}$ e uma semínima vale $\frac{1}{4}$, então $24 * \frac{1}{8} + 12 * \frac{1}{4} = \frac{24}{8} + \frac{12}{4} = 3 + 3 = 6$.

Logo, a alternativa correta seria a letra d.

Jogo stop

PRIMEIRA RODADA

a) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} =$ d) $\frac{3}{20} + \frac{9}{20} =$

b) $\frac{7}{5} + \frac{3}{5} =$ e) $\frac{4}{5} + 1 =$

c) $\frac{21}{2} + \frac{3}{2} =$ f) $\frac{5}{4} + \frac{1}{2} =$

a) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{7}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$

c) $\frac{21}{2} + \frac{3}{2} = \frac{24}{4} = \frac{12}{2} = 6$

d) $\frac{3}{20} + \frac{9}{20} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

e) $\frac{4}{5} + 1 = \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{9}{5}$

f) $\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}+\frac{2}{4}=\frac{7}{4}$

SEGUNDA RODADA

a) $\frac{4}{14}-\frac{3}{14}=$

b) $\frac{8}{5}-\frac{3}{6}=$

c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=$

d) $\frac{1}{9}-\frac{9}{9}=$

e) $\frac{1}{3}+\frac{8}{21}=$

f) $\frac{5}{2}-\frac{1}{9}=$

a) $\frac{4}{14}-\frac{3}{14}=\frac{1}{14}$

b) $\frac{8}{5}-\frac{3}{6}=\frac{48}{30}-\frac{15}{30}=\frac{33}{30}=\frac{11}{10}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=\frac{7}{14}+\frac{6}{14}=\frac{13}{14}$

d) $\frac{1}{9}-\frac{9}{9}=\frac{-8}{9}$

e) $\frac{1}{3}-\frac{8}{21}=\frac{7}{21}-\frac{8}{21}=\frac{-1}{21}$

f) $\frac{5}{2}-\frac{1}{29}=\frac{145}{58}-\frac{2}{58}=\frac{143}{58}$

TERCEIRA RODADA

a) $\frac{3}{10}*\frac{5}{10}=$

b) $\frac{1}{5}*\frac{3}{5}=$

c) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=$

d) $\frac{3}{20}*4=$

e) $\frac{2}{5}\div\frac{1}{3}=$

f) $\frac{5}{4}*\frac{0}{2}=$

a) $\frac{3}{10}*\frac{5}{10}=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$

b) $\frac{1}{5}*\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$

c) $\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=\frac{1}{2}*\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

d) $\frac{3}{20}*4=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

e) $\frac{2}{5}\div\frac{1}{3}=\frac{2}{5}*\frac{3}{1}=\frac{6}{5}$

f) $\frac{5}{4}*\frac{0}{2}=\frac{5}{4}*0=0$

QUARTA RODADA

a) $\frac{1}{2} \div \frac{5}{2} =$ d) $\frac{32}{20} \div \frac{9}{10} =$

b) $\frac{7}{5} \div \frac{3}{5} =$ e) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - 1 =$

c) $17 \div \frac{3}{2} =$ f) $\frac{3}{10} \div \frac{1}{10} * \frac{1}{3} =$

a) $\frac{1}{2} \div \frac{5}{2} = \frac{1}{2} * \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{7}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{5} * \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

c) $17 \div \frac{2}{5} = 17 * \frac{5}{2} = \frac{85}{2}$

d) $\frac{32}{20} \div \frac{9}{10} = \frac{32}{20} * \frac{10}{9} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$

e) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - 1 = \frac{8}{10} - 1 = \frac{8}{10} - \frac{10}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$

f) $\frac{3}{10} \div \frac{1}{10} * \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{10} * \frac{10}{1}\right) * \frac{1}{3} = \frac{30}{10} * \frac{1}{3} = \frac{30}{30} = 1$

Atividade introdutória 2

a) Primeiro método:

$$custo\ de\ viagem \qquad porcentagem$$

$$1400 \ -------\ -100$$

$$CA \ -------- \ 150$$

$$100 * CA = 1400 * 150$$

$$CA = \frac{210000}{100}$$

$$CA = 2100$$

Assim, o custo da viagem na alta, ou seja, sem desconto algum, pelo método 1 (regra de três).

Segundo método: O custo na alta CA pode ser dado transformando o 150% em sua forma decimal para multiplicar com o valor na alta, $1{,}50 * 1400 = 2100$, isso ocorre porque $150\% = 1{,}50 = \frac{150}{100}$

b) Agora basta calcular o desconto de 25% em CA.

Primeiro método:

$$custo\ de\ viagem \qquad porcentagem$$

$$2100 - - - - - - - -\ 100$$

$$D \quad - - - - - - -\ 25$$

$$100 * D = 2100 * 25$$

$$D = \frac{52500}{100}$$

$$D = 525$$

$$CB = CA - D$$

$$CB = 2100 - 525$$

$$CB = 1575$$

Segundo método: Observando que com a fração podemos chegar ao custo de uma maneira mais rápida, explicando a eles a ideia de desconto. Se o desconto é de 25%, ou seja, terá um custo de 75%, apresentaríamos a seguinte resolução:

$$CB = \left(\frac{100 - 25}{100}\right) * 2100$$

$$CB = 1575$$

Assim obtemos o custo na baixa com o desconto.

Atividades sobre Razão e Proporção

1° Atividade

O período proposto é de 40 dias, sendo entregue $8610\, kg$ de ração para 12300 frangos, e queremos descobrir a quantidade de quilogramas de ração será necessária para alimentar 20000 frangos. Podemos resolver por meio da regra de três, já que conhecemos três valores e precisamos encontrar um quarto.

$$Kg\ de\ ração \qquad quantidade\ de\ frangos$$

$$8610 - - - - - - - - -12300$$

$$x - - - - - - - - -20000$$

$$12300x = 172200000$$

$$12300x \div 100 = 172200000 \div 100$$

$$123x = 1722000$$

$$x = 14000$$

Logo, vai ser distribuído $14.000kg$ de ração que corresponde a alternativa E.

2° Atividade

É preciso notar que existe uma razão entre a quantidade de telhas e a quantidade de tijolos, sendo $\frac{1500}{1200}$. Sabemos que 900 telhas já foram carregadas nesse caminhão, do total permitido 1500, podemos carregar ainda $1500 - 900 = 600$ telhas. Vamos encontrar o equivalente a essa quantidade de telhas em tijolos, através da proporção.

$$Telhas \qquad Tijolos$$

$$1500 ----1200$$

$$600 ---- x$$

$$1500x = 1200 * 600$$

$$1500x = 720000$$

$$1500x = 720000$$

$$x = \frac{720000}{1500}$$

$$x = 480$$

Logo, ele pode colocar em seu caminhão a quantidade de 480 tijolos, alternativa D.

3° Atividade

Sabemos que o carro pode percorrer uma $60km$ a cada hora, e que ele precisa de 5 horas para chegar no destino seguindo nessa velocidade. Podemos notar a presença das razões entre km e horas e de km/h e horas de percurso. Vamos precisar trabalhar apenas com o segundo caso.

$Km\ por\ hora \qquad Tempo\ de\ chegada$(h)

$$60 - - - - - - - - -5$$

$$100 - - - - - - - - x$$

Se a velocidade do carro aumentou durante o percurso, é esperado que o tempo diminua. Assim, como um aumenta e o outro diminui, temos grandezas inversamente proporcionais.

Devemos inverter a ordem de uma das razões, ficando então:

$$Km\ por\ hora \qquad Tempo\ de\ chegada$$

$$60 - - - - - - - - -x$$

$$100 - - - - - - - - 5$$

$$100x = 60 * 5$$

$$100x = 300$$

$$x = 3$$

Logo, o tempo para chegada ao destino será de 3 horas.

5.2. **Material entregue aos alunos;**

DEFINIÇÃO – Frações
Fração é um número que representa uma parte de algo inteiro, ou seja, uma quantidade de um todo maior. O conjunto numérico no qual as frações estão contidas é chamado de conjuntos dos números racionais e toda fração é expressa na forma a/b com "a" sendo o numerador e "b" sendo o denominador, este último é diferente de zero.

DEFINIÇÃO – Números racionais
O conjunto dos racionais é representado por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$ e seus números possuem a característica de poderem ser representados como números decimais ou frações de números inteiros, contanto que o denominador não seja zero.

DEFINIÇÃO – Frações equivalentes e simplificação de frações.
Frações equivalentes são aquelas escritas de maneiras diferente, mas que expressam o mesmo valor matemático. Elas representam a mesma parte de um todo e para determiná-las é necessário multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero.
Na simplificação de frações, dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número racional diferente do zero, até chegar em uma fração irredutível, quando não tem mais como simplificar.

Atividade introdutória 1

(ENEM – 2009) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso com duas Semínimas ou uma Mínima ou quatro Colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras. Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com:

a) 24 fusas b) 3 semínimas c) 8 semínimas d) 24 colcheias e 12 semínimas
e) 16 semínimas e 8 semicolcheias

DEFINIÇÃO – Operações com frações
Como a fração é um número, podemos trabalhar com elas as operações básicas da matemática. Podemos somar, subtrair, multiplicar, dividir e realizar a potenciação e radiciação de frações. Para efetuar essas operações, devemos usar os conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações.

IV. Adição de frações e Subtração de frações

Para encontrar a solução desta operação com fração, o primeiro passo é deixar os denominadores dos números fracionários envolvidos iguais, para isso usamos da fração equivalente. Caso já sejam iguais, só precisamos somar/subtração os numeradores.

Soma de denominadores iguais:

b) $\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=\frac{10}{5}$ b) $\frac{29}{7}+\frac{30}{7}=\frac{59}{7}$

Soma de denominadores diferentes

c) $\frac{4}{6}+\frac{5}{3}=\frac{4*1}{6*1}+\frac{5*2}{3*2}=\frac{4}{6}+\frac{10}{6}=\frac{14}{6}$ d) $\frac{15}{8}+\frac{23}{7}=\frac{15*7}{8*7}+\frac{23*8}{7*8}=\frac{105}{56}+\frac{184}{56}=\frac{289}{56}$

Para subtração é análogo:

b) $\frac{4}{6}-\frac{5}{3}=\frac{4*1}{6*1}-\frac{5*2}{3*2}=\frac{4}{6}-\frac{10}{6}= -1$ b) $\frac{9}{8}-\frac{10}{16}=\frac{9*2}{8*2}-\frac{8*1}{16*1}=\frac{18}{16}-\frac{8}{16}=\frac{5}{8}$

V. Multiplicação de frações

Na multiplicação, os denominadores envolvidos não precisam ser iguais. Tudo o que precisamos fazer é multiplicar um numerador pelo outro, e depois multiplicar um denominador pelo outro.

Multiplicação de frações:

b) $\frac{5}{6}*\frac{10}{3}=\frac{50}{18}$ b) $\frac{9}{8}*\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

VI. Divisão de frações

A divisão é realizada por meio da troca de frações que podem ser divididas, mudando de posição o numerador pelo denominador e fazendo a multiplicação dos novos objetos da operação com frações.

Divisão de frações:

b) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2}*\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$ b) $\frac{\frac{7}{8}}{3}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{1}}=\frac{7}{8}*\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$

DEFINÇÃO – Proporção
Proporção é a igualdade entre duas razões ou mais, então, essas razões assumem o mesmo valor. Representamos uma proporção da seguinte forma: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. Sendo A e D os chamados extremos (externos) e B e C os meios (internos). A proporção obedece a propriedade “O produto dos externos é igual ao produto dos meios”, ou seja, A*D = B*C.
Através dessa propriedade no cálculo de proporções, quando temos três valores conhecidos e precisamos encontrar um quarto, realizamos essa multiplicação cruzada. Por esse motivo, o cálculo de proporções é chamado de regra de três.
DEFINIÇÃO – Grandezas diretamente e inversamente proporcionais
Grandezas é tudo aquilo que pode ser medido, contado. Podendo ter suas medidas aumentadas ou diminuída, como exemplos, temos o volume, o comprimento, o tempo, a capacidade, o custo, a produção, entre outros. Dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais (GDP) quando, o aumento de uma leva ao aumento dá outra. Duas grandezas são inversamente proporcionais (GIP) quando, o aumento de uma leva a redução da outra.
DEFINIÇÃO – Porcentagem
Representado pelo símbolo %, como seu próprio nome indica, porcentagem ou por cem, é a divisão de um número qualquer por 100. Ela pode ser representada na forma percentual 12%, forma fracionária $\frac{12}{100}$ e na forma decimal 0,12. Logo, porcentagem é uma razão de denominador 100.
Forma percentual para fracionária
b) $26\%=\frac{26}{100}$ b) $0{,}1\%=\frac{0{,}1}{100}$
Forma percentual para decimal
b) $14\%=\frac{14}{100}=0{,}14$ b) $0{,}05\%=\frac{0{,}05}{100}=0{,}0005$

Atividade introdutória 2

1) Na alta temporada, um pacote para Foz do Iguaçu sai por R$ 1.400,00. Na baixa temporada, o mesmo pacote de viagem tem um desconto de 25%. Um casal e amigos decidem que querem contratar uma viagem para Foz do Iguaçu, para isso eles resolveram orçar os valores da viagem. Como a quantidade de pessoas passa da quantidade definida para o pacote, a companhia decide que o valor do pacote para eles será de 150% do valor, porém mantendo o desconto da baixa temporada.

c) Quanto será o custo desse pacote na alta temporada?
d) Quanto será o custo desse pacote na baixa temporada?

Atividades sobre razão e proporção

2) Em uma granja, o frango passa por várias etapas, e em cada uma delas a quantidade de comida que ele recebe é diferente. Sabendo-se que o crescimento de um frango leva 40 dias e que são utilizados 8 610 kg para alimentar 12 300 frangos nesse período. Ainda nesse mesmo prazo, qual seria a quantidade de ração necessária para alimentar 20 000 frangos?

b) 20000 kg b) 17000 kg c) 16000 kg d) 15000 kg e) 14000 kg

3) (**ENEM – 2013**) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras e o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

1) 300 tijolos. b) 360 tijolos. c) 400 tijolos. d) 480 tijolos.
e) 600 tijolos.

Um automóvel desloca-se a 60 km/h e demora 5 horas para chegar a seu destino. Se o mesmo automóvel se desloca ao longo desse percurso a 100 km/h, quanto tempo levaria para completar esse mesmo percurso?

5.3. **Relatório;**

Encontro 1 05/03/2022

Relatório 1 - Sala A103

Grupo de estagiários: André Luiz Z. da C.; Cleison Sotel; William Pinheiro

No dia cinco de março de 2022, foi realizado o primeiro encontro do Promat. O tema da aula foi frações, razão, proporção e porcentagem. Por ser o primeiro encontro, a aula se iniciou um pouco mais tarde, aproximadamente, oito horas e quinze minutos. Antes da aula se iniciar, foram distribuídos cartões para os discentes colocarem seus nomes, uma espécie de crachá e, uma folha para escreverem o nome e o número de telefone para a criação do grupo do *Whatsapp*. Primeiramente, a professora orientadora comentou sobre o funcionamento do curso, como os momentos de intervalo e saída, instruções de locais, entre outros avisos.

Em seguida, nos apresentamos contando como serão nossas aulas e a forma como escolhemos ensinar, dando foco a participação do aluno. Começamos com a dinâmica de apresentação, falando nossos nomes, idades, locais onde moramos, hobbies e o curso que pretendemos/estamos cursando. Pedimos que os alunos se apresentassem, mas dissemos que eles não seriam obrigados. Neste primeiro momento de interação, a maioria se apresentou, mas alguns optaram por não falar. Notamos que muitos alunos vieram de cidades vizinhas, a maioria dos discentes estava concluindo o ensino médio e, estava no curso com o objetivo de fazer o vestibular para algum curso superior. Havia um aluno que pertencia ao Curso de Matemática e, outra que estava no Curso de Ciências Contábeis.

Passadas as apresentações, demos prosseguimento a aula entregando a primeira lista e, introduzindo o estudo de frações por meio de um problema do ENEM[1] 2009. Os alunos se mostraram interessados em resolvê-lo, no entanto, conforme o resolviam, boa parte da sala tinha dificuldades em compreender o enunciado. Isso foi perceptível na parte em que era preciso encontrar o valor fracionário do compasso composto por oito frações de $\frac{3}{4}$ para, somente depois verificar se algumas das alternativas apresentava o mesmo valor. Os estagiários foram em cada grupo para atender as dúvidas, lendo em conjunto com eles o enunciado e respondendo suas dúvidas com questionamentos tais como "O que se pede no problema?", "Os

[1] Exame Nacional do Ensino Médio, criado em 1998, com o objetivo de avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica. Fonte: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem

compassos musicais possuem qual valor?”. Após o tempo de resolução proposto, dois alunos aceitaram ir ao quadro para apresentar suas resoluções. Um conseguiu chegar a resposta correta, mas por um método não convencional, enquanto o outro não chegou a resposta correta, mas apresentou uma boa manipulação das operações utilizando frações equivalentes.

A aula prosseguiu com auxílio do projetor, com os professores/estagiários se revezando na apresentando do conteúdo. Foi falado sobre a ideia de frações, seguida pelos alunos apresentando alguns exemplos de frações próprias, impróprias e aparentes, antes de falarmos de suas definições, como havíamos planejado. Perguntamos a eles o que entendiam por frações equivalentes e, foi possível notar um aluno respondendo que eram frações com o mesmo valor numérico. Explicamos a definição de frações equivalentes e pedimos alguns exemplos a eles. Nesse momento, já havia dado a hora do intervalo, então deixamos o jogo que havíamos preparado para depois do intervalo e, os liberamos para voltarem às dez horas.

Após o intervalo, realizamos duas rodadas do jogo, os alunos gostaram da prática e puderam tirar dúvidas sobre como descobrir as frações equivalentes e realizar a soma e subtração de frações. Em seguida, foi entregue a segunda lista planejada para a aula e, comentado no quadro sobre a definição das operações com frações por meio de situações particulares e exemplos.

Para o próximo momento, aplicamos um segundo problema, no qual se pedia que os alunos calculassem o valor de um pacote de viagem após um desconto ser aplicado, para introduzir o estudo de razão e proporção. Na resolução, dois alunos apresentaram suas resoluções oralmente, ambas estando corretas, mas por caminhos distintos.

O primeiro usou da lógica e operou uma divisão para obter os resultados, enquanto o outro usou a proporção. Um estagiário também comentou sobre um terceiro método, multiplicando os valores pelas porcentagens (com valores decimais).

Em seguida, foi comentado sobre a definição de grandezas, razão, proporção e pedido que dessem algum exemplo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Eles apresentaram dois exemplos, o primeiro sobre a relação entre grandezas diretamente proporcionais entre quantidade de pessoas e ingredientes necessários para execução de uma receita; já, o segundo sobre a relação inversamente proporcional entre velocidade e tempo. Antes de realizarmos as atividades sobre razão e proporção, comentamos a definição de porcentagem, utilizando alguns exemplos para explicação. Por fim, usamos o restante da aula para a resolução das três atividades propostas. Nesse tempo de resolução, muitos alunos conseguiram resolvê-las por completo, mas alguns apresentaram uma dificuldade em relacionar as grandezas na proporção e identificar quais grandezas envolvidas e, a forma de se trabalhar com uma grandeza inversamente proporcional. Os estagiários orientaram os alunos com dificuldades em organizar as grandezas e explicaram o que fazer com grandezas inversamente proporcionais. As correções foram deixadas para a aula seguinte, por conta da falta de tempo.

Analisando nosso primeiro encontro, concluímos que a organização inicial das mesas ajudou no trabalho em equipe e no diálogo entre eles. Boa parte dos alunos se mostrou participativo. A professora orientadora interviu em alguns momentos complementando melhor alguma explicação. Em contrapartida, percebemos que devemos administrar melhor o tempo das atividades e dos nossos comentários, para que seja possível também corrigir as atividades durante a aula.

6. **Encontro 2: Plano de aula;**

2º Encontro - 12 de março de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Potenciação e radiciação com números reais, conjuntos e suas operações.

Objetivo geral: Revisar as propriedades de potenciação e radiciação com números reais, e desenvolver a noção de conjuntos, seus tipos e estudar suas operações.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

Compreender a definição e as propriedades da potenciação e radiciação com números reais;

Efetuar cálculos com potências de expoentes negativos e fracionários e efetuar a transformação para raiz;

Compreender os tipos de conjuntos e suas formas de representação;

Compreender as operações de conjuntos e aplicar na resolução de problemas;

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, Projetor, *Power Point*, Folhas Sulfites.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Nessa aula, não será permitido o uso de calculadora, devido ao PROMAT ter foco no ENEM e vestibulares onde seu uso também é restrito. Utilizaremos o projetor no decorrer da aula para deixá-la mais dinâmica, apresentando os conteúdos em lâminas previamente preparadas. A resolução de tarefas ou anotações de exemplos vai ser feita no quadro.

Para o primeiro momento, vamos pedir aos alunos que se organizem por afinidade em grupos de 5 ou 6 participantes. Assim poderemos atender as dúvidas comuns de cada grupo e para jogarem o jogo planejado. Em seguida, vamos propor que joguem o *Jogo da velha com potenciação e radiciação*, selecionamos esse jogo com o objetivo de ajudar a desenvolverem o raciocínio lógico e o cálculo com as propriedades da potenciação e radiciação de maneira mais dinâmica e divertida. Além disso, alunos podem relembrar e aprender propriedades, observando o processo de resolução do colega ou do grupo adversário. Vai ser realizado apenas duas rodadas por conta do tempo, caso alguns grupos fiquem com dificuldades em resolver alguma alternativa, um estagiário entraria auxiliando fazendo questionamentos sobre o modo de usar a potenciação e radiciação, sem explicar sobre a propriedade específica. Os grupos que ganharem, vão receber um bis para cada integrante.

Após o jogo, veremos a definição de potenciação, utilizando em conjunto a tabela de potencias de base 2. Em seguida, vamos definir as propriedades da potenciação a partir do conhecimento prévio que eles já possuem, mais a experiência com o jogo. Falaremos também da definição da radiciação e das suas propriedades até o intervalo. Momentos antes do intervalo, vamos entregar a primeira folha de resumo para cada aluno contendo um resumo sobre essa primeira parte da aula.

Depois do intervalo, focaremos nossa atenção para o estudo sobre conjuntos e suas relações e operações. Começaremos com uma prevê discussão sobre a definição de um conjunto, sua utilidade diária e seus tipos, seguido para o estudo das representações de um conjunto, uma segunda atividade introdutória para introduzir o estudo sobre as operações com conjuntos que veremos depois de comentar brevemente sobre a relação de pertinência e inclusão. Por fim, após vermos as operações com conjuntos e distribuirmos a segunda folha de resumo, frente e versa com o conteúdo de conjuntos, pediremos que resolvam as duas atividades finais do conteúdo. Caso não sobre tempo, deixaremos a correção para o início da próxima aula.

1° Correção das atividades da aula passada (10 min)

Para começar, faremos a correção das três atividades sobre razão e proporção que ficaram da primeira aula. Vamos corrigir as três atividades e verificar se os alunos aplicaram um método igual ou diferente.

2° Jogo da velha com potenciação e radiciação (40 min)

DINÂMICA DO JOGO

Para esse jogo, os grupos de cinco e seis alunos deverão se subdividir da seguinte forma:

Grupos de cinco alunos se dividem em um grupo de dois e outro de três;

Grupos de seis alunos se dividem em dois grupos de três;

Esses grupos divididos irão se enfrentar durante o jogo e as perguntas serão apresentadas nas lâminas.

Vai ser distribuído uma folha sulfite para cada grupo, na qual pediremos para que eles desenhem em ambos os lados o cardinal (#) para o jogo.

Cada pergunta vai ser apresentada nos slides, uma de cada vez, para todos os grupos resolverem. Dos grupos que competirão, aquele que terminar primeiro deve indicar que já finalizou a questão para que um professor possa ir verificar se acertou. Nesse momento, o grupo adversário pode continuar resolvendo caso queira.

Se o grupo que terminou primeiro acertar a questão, vai poder marcar com a caneta (X ou O) no cardinal (#), porém, se errarem, não poderá marcá-lo e será a vez do outro grupo dar sua resposta. Se nenhum grupo acertar, ninguém pontua.

O grupo que completar com o seu símbolo uma fileira na vertical, horizontal ou diagonal, como ocorre no jogo da velha, vai ganhar a rodada. Se der velha, ou seja, se ninguém conseguir completar uma fileira, ninguém pontua.

Perguntas que serão utilizadas no jogo

Quanto vale $(4^2)^{\frac{1}{4}}$?

Quanto vale $(2^3)^{\frac{4}{3}}$?

Quanto vale $3^2 * 3^2 * 3^2$?

Quanto vale $\left(\sqrt[2]{\sqrt{4} * \sqrt{16}}\right)^2$?

Quanto vale $7^2 + 7^2 + 7^2$?

Quanto vale $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$?

Quanto vale $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$?

Mariana tinha 121 balas e ela prometeu dar a raiz quadrada de suas balas a seu primo. Depois de dar as balas ao seu primo, deu ainda 27 balas a sua irmã mais nova. Com quantas balas ficou Mariana?

Quanto vale $(12^0 + 5^0)^2$?

Qual é a raiz quadrada de 625 ?

Quanto vale $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}$?

Quanto vale -2^5?

Qual é a raiz quadrada de 196?

Quanto vale $\frac{\sqrt[5]{100^5}}{5^{-1}}$?

Quanto vale $2^{\frac{2}{6}} * 2^{\frac{24}{6}} * 2^{-\frac{1}{6}}$?

Qual é a raiz quadrada de 225?

Em um estacionamento há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas e em cada roda há 4 parafusos. Qual é o total de parafusos desses 4 automóveis?

Quanto vale $(3 * 27)^{\frac{1}{4}}$?

Quanto vale $\left(3^2 * \left(\sqrt[3]{27}\right)^0 + 1\right)^2$?

Um gato come 5 ratos por dia. Quantos ratos, 5 gatos comem em 5 dias?

Quanto vale $24^{-5} * 24^7$?

3° Definição de potenciação e radiciação. (50 min)

Potenciação – Definição e propriedades (25 min)

Após o jogo, apresentaremos a definição de potenciação e trabalharemos com eles a tabela de potenciação de base dois. Em seguida, falaremos das propriedades da potenciação que eles observaram no jogo, usaremos exemplos, explicando o motivo da propriedade ser válida, para então mostrar o caso geral.

DEFINIÇÃO – Potenciação ou exponenciação: Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, denominada potência, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e o n de expoente.

Tabela das potências de dois

Tabela 1: Tabela das potências de 2.

Potências de 2	Valor das potências de 2
$\mathbf{2^{-4}}$	$\mathbf{\frac{1}{16}}$
$\mathbf{2^{-3}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$
$\mathbf{2^{-2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$
$\mathbf{2^{-1}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
$\mathbf{2^{0}}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{2^{1}}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{2^{2}}$	$\mathbf{4}$
$\mathbf{2^{3}}$	$\mathbf{8}$
$\mathbf{2^{4}}$	$\mathbf{16}$
$\mathbf{2^{5}}$	$\mathbf{32}$

Fonte: Autores (2022)

Em seguida, vamos apresentar exemplos de operações de potenciação e vamos para perguntar qual propriedade da potenciação que esteve presente no jogo e está agora presente no exemplo. A partir desses exemplos, planejamos explicar o motivo da propriedade ser válida e de definir as propriedades de maneira geral.

Propriedades da potenciação

Exemplo: $2^2 * 2^3 = 2^5$

Multiplicação de potências de bases iguais, mantém-se a base e somam-se os expoentes.

$a^n . a^m = a^{m+n}$

Exemplo: $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$

Divisão de potências de bases iguais, mantém-se as bases e subtraem-se os expoentes.

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Exemplo: $(2^3)^2 = 2^{3*2} = 2^6$

Na potência de uma potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(a^n)^m = a^{m*n}$

Exemplo: $3^2 * 2^2 * 5^2 = (3 * 2 * 5)^2$

Potenciação de quando a base é um produto, multiplicam-se as bases e mantém-se os expoentes.

$a^n * b^n * c^n = (a * b * c)^n$

Exemplo: $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Potenciação de quando a base é um quociente, divide-se as bases e mantém-se os expoentes.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ com b diferente de zero.

Exemplos: $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16} \ \ e \ \ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

Potenciação de expoente negativo, invertemos a base e também o sinal do expoente.

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, de outra forma $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Radiciação – Apresentação e propriedades (25 min)

No próximo momento, vamos perguntar a eles como definem a radiciação e o que a diferencia da potenciação.

DEFINIÇÃO – Radiciação: Enquanto a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número racional diferente de zero, chamado de índice e b que é a raiz.

$$\underbrace{\sqrt[n]{x * x * x * x * \ldots * x}}_{n \ vezes} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Dizemos que a raiz é exata quando o resultado é um número inteiro e, não exato, se for um número irracional. O método mais comum para calcular as raízes é através da fatoração numérica do radicando em números primos.

Em seguida, apresentaremos a tabela abaixo e pediremos que observem o padrão ocorrendo e como poderíamos definir essa propriedade em ocorrência.

Relação entre potências com expoente fracionário e a radiciação.

Para definir a relação entre potencias com expoente fracionário e a radiciação, apresentaremos o padrão na tabela abaixo com o objetivo de fazê-los perceberem a divisão presente no expoente.

Tabela 2: Tabela de Raízes.

$\boldsymbol{\sqrt[2]{2^6} = 8 = 2^3}$	$\boldsymbol{\sqrt[2]{2^8} = 16 = 2^4}$	$\boldsymbol{\sqrt[2]{2^{10}} = 32 = 2^5}$	$\boldsymbol{\sqrt[2]{5^4} = 25 = 5^2}$
$\boldsymbol{\sqrt[3]{2^6} = 4 = 2^2}$	$\sqrt[3]{3^9} = 27 = 3^3$	$\sqrt[3]{4^3} = 4 = 4^1$	$\sqrt[3]{5^3} = 5 = 5^1$
$\boldsymbol{\sqrt[4]{3^{12}} = 27 = 3^3}$	$\sqrt[4]{5^4} = 5 = 5^1$	$\sqrt[4]{5^8} = 25 = 5^2$	$\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$
$\sqrt[2]{\boldsymbol{2^3}} =?$	$\sqrt[3]{2^4} =?$	$\sqrt[2]{3} =?$	$\sqrt[4]{5^2} =?$

Fonte: Autores (2022).

Propriedade

A raiz enésima pode ser transformada em uma potência com expoente racional. O índice (n) da raiz corresponde ao denominador, e o expoente (m) do radicando corresponde ao numerador.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Para apresentar as outras propriedades da radiciação, apresentaremos um exemplo para cada propriedade e discutiremos com eles. Através do exemplo, iremos explicar o motivo dessa propriedade.

Propriedades da radiciação

Exemplo: $\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = 2$

A raiz de um número que está elevado a um expoente igual ao índice, é igual a esse próprio número.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplo: $\sqrt[4]{81 * 16} = \sqrt[4]{81} * \sqrt[4]{16}$

No produto de raízes de mesmo índice, multiplicam-se os radicandos dentro da raiz.

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

Exemplo: $\frac{\sqrt[2]{27}}{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{\frac{27}{3}} = \sqrt[2]{9} = 3$

Na divisão de raízes de mesmo índice, dividem-se os radicandos dentro da raiz.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2*4]{256} = \sqrt[8]{256} = 2$

Na raiz da raiz, basta multiplicarmos os índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$$

Exemplo: $\left(\sqrt[2]{16}\right)^2 = \sqrt[2]{16^2} = 16$

Na potência de uma raiz, elevamos o radicando pelo expoente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

4° Intervalo (20 min)

5° Atividade introdutória de conjuntos e o conteúdo de conjuntos. (90 min)

O que é um conjunto? (20 min)

Vamos começar perguntando o que eles entendem por conjuntos, se são apenas com números ou podem ser também com objetos, letras, etc. É interessante perguntar em que momentos usamos os conjuntos no dia a dia, se poderiam dar um exemplo.

Usaremos os exemplos dados para inteirá-los do assunto, mostrando as relações de conjuntos que podemos encontrar nos exemplos, além de projetarmos alguns para caso de não termos algum exposto por eles, como:

Figura 2: Representação de conjuntos.

Fonte: https://es.dreamstime.com/diversos-dispositivos-de-la-rueda-del-deporte-actividad-parque-veh%C3%ADculos-y-sistema-urbanos-ejemplo-vector-transporte-coche-manual-image118223704

Onde usaremos caso necessário, para questioná-los sobre algumas relações que podemos usar nos próximos momentos. Em seguida, veremos as formas de representação dos conjuntos que eles conhecem.

Representação de um conjunto (10 min)

É importante conhecer as formas de representar um conjunto, então vamos perguntar se eles poderiam representar o conjunto dos números ímpares do 1 até o 10.

As formas possíveis de representação são:

Enumerando os elementos:

$A = \{1,3,5,7,9\}$

Considerando uma propriedade dos elementos:

$A = \{x |\ x \text{ é } um\ número\ ímpar\ de\ 1\ até\ o\ 10\}$

$A = \{x |\ x = 2a + 1\ ; a \in \mathbb{N}; 0 \leq a \leq 4\}$

Desenhando a figura (Diagrama de Venn):

Em seguida, vamos apresentar para eles uma atividade introdutória para o estudo de operações de conjuntos da UFBA adaptada, separamos um tempo de 10 minutos para eles resolverem. Após esse tempo, um estagiário apresentaria a resolução junto da sala, usando o diagrama de Venn, um outro tempo de 10 minutos para resolução.

Atividade introdutória (10 min)

(UFBA - Adaptado) Em uma enquete, várias pessoas foram entrevistadas acerca de suas preferências em relação a três esportes, Vôlei (V), Basquete (B) e Tênis (T), cujos dados estão indicados na tabela a seguir:

Quadro 2: Número de pessoas por esporte da atividade

ESPORTE	*N° DE PESSOAS*
V	300
B	260
T	200
V e B	180
V e T	130
B e T	100
V, B e T	50
Nenhum	40

Fonte: Autores (2022).

De acordo com esses dados, é correto afirmar que, nessa enquete, o número de pessoas entrevistadas foi:

a) 400 b) 440 c) 490 d) 530 e) 570

Tipos de conjuntos e suas relações

Essa parte seria o resultado da discussão inicial dobre “o que é um conjunto?”, ela será entregue na segunda folha, antes das atividades sobre conjuntos.

Conjunto vazio: Conjunto sem nenhum elemento, representado por $A = \{\ \}$ ou $\emptyset$

Conjuntos unitários: Conjunto com um único elemento, exemplo, $D = \{1\}$.

Conjuntos ordenados: Conjunto no qual a ordem dos elementos importa, por exemplo, par ordenado do plano cartesiano $A = (1{,}2)$, trio ordenado $B = (1{,}2{,}3)$.

Conjunto universo: É o conjunto considerado para estudar determinada situação, por exemplo, para estudar a faixa salarial de empregados, precisamos conhecer o universo pesquisado $U = \{funcionários\ da\ empresa\}$.

Conjuntos finitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplo $A = \{\ 2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{Meses\ do\ ano\}$ $C = \{\ Vogais\ no\ alfabeto\}$

Conjuntos infinitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo $\mathbb{N} = \{0{,}1{,}2, \dots {,}100, \dots\}$, $\mathbb{R} = \{\dots, -1, \dots, -0{,}5, \dots {,}1, \dots, \pi, \dots, 27, \dots\}$

Relação de pertinência

Usamos o símbolo $\in$ para dizer que um elemento pertence a um conjunto, e $\notin$ para indicar que o elemento não pertence ao conjunto.

Exemplo: $2\ \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$, mas $5 \notin\ \{1{,}2{,}3{,}4\}$;

Dizemos que A é um subconjunto de B, se todos os elementos de A pertencem também a B. Com os subconjuntos vem a relação de inclusão entre conjuntos.

Relação de inclusão

Usamos o símbolo $\subset$ para dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, $A \subset B$, significa que todos os elementos do conjunto A vai estar no conjunto B. Já o símbolo $\supset$ indica que um conjunto contém outro, ou seja, $A\ \supset B$ indica que A contém todos os elementos de B.

Exemplo: $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $A = \{Meses\ com\ 30\ dias\}$, temos que $B \subset A\ e\ A \subset B$.

Antes de entregar as atividades para esse conteúdo, vamos apresentar as quatro operações possíveis com conjuntos. Começaremos perguntando se eles conhecem alguma dessas operações e se poderiam dar algum exemplo utilizando números como elementos do conjunto. Caso eles não apresentem, preparamos abaixo alguns exemplos para a apresentação.

Caso estejam com dificuldade para lembrar quais são essas operações, podemos lembrá-los que uma delas é a união e só depois pedimos os exemplos simples.

Operações com conjuntos

União de conjuntos

Usando o símbolo U, dizemos que $A \cup B$, representa a união dos elementos do conjunto A com o de B.

Exemplos usando elementos numéricos;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{3,4\}\ tem\ A \cup B = \{1,2,3,4\}$

$G = \{1,2\}\ e\ H = \{2,3\}\ tem\ G \cup H = \{1,2,3\}$

$E = \{1,2\}\ E\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E \cup F = \{1,2,3,4\}$

Usando desenhos;

Apêndices: A, B e C.

interseção de conjuntos

Usando o símbolo ∩, dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B.

Exemplos usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{2,3\}\ tem\ C \cap D = \{2\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{3,4\}\ tem\ G \cap H = \{\ \}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E \cap F = \{1,2\}$

Usando desenhos;

Apêndice: D, E e F.

Diferença entre conjuntos

Com o símbolo de subtração, dizemos que $A - B$ é a diferença entre os conjuntos A e B. Ele é formado pelos elementos que pertencem a A e que não pertencem a B.

Exemplos

Usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{2,3\}\ tem\ A - B = \{1\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{3,4\}\ tem\ C - D = \{1,2\}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E - F = \{\ \}$

Conjuntos complementares

O símbolo C_B^A indica o complementar de A em relação a B. Ele é derivado da ideia de diferença entre conjuntos, sendo igual a $C_B^A = B - A$. São todos os elementos que não pertencem ao conjunto A em relação ao conjunto B.

Exemplos usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{1\}\ tem\ C_A^B = \{2\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{1,2,3,4\}\ tem\ C_D^C = \{3,4\}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ C_E^F = \{\ \}$

Atividades sobre operações com conjuntos (30 min)

Vamos dar um tempo de 20 minutos para resolverem as duas atividades, os estagiários andarão pela sala, tirando dúvidas através de questionamentos e incentivando o diálogo entre os grupos.

1-(PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A. Qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

a)0. b)2. c)3. d)4. e)5.

2-(ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

Tipo A: apenas o antígeno A está presente;

• Tipo B: apenas o antígeno B está presente;

• Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;

• Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a

a)30. b)60. c)70. d)90. e)100.

Essas tarefas serão resolvidas se sobrar tempo no final da aula, serão convidados dois alunos para apresentarem as resoluções na lousa, recebendo sempre a orientação dos estagiários. Caso não sobre tempo, as resoluções ficarão para o início da próxima aula. Um tempo mínimo de 10 minutos é necessário para essa etapa.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referências:

..., Igor. Potenciação e Radiciação – I. **Racha Cuca**. 2013. Disponível em: https://rachacuca.com.br/quiz/68293/potenciacao-e-radiciacao-i/. Acesso em: 05 fev. 2022.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Matemática** – Construção e significado. São Paulo: Moderna, 2008.

Exercícios resolvidos – Potenciação e Radiciação. **Matemática didática**. Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/PotenciacaoRadiciacaoExercicios.aspx. Acesso em: 05 fev. 2022.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS Marcelo. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009.

MENINO PENSANDO. Disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/menino-pensando_12847318.htm. Acesso em 19 de fev. de 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Radiciação. **Mundo educação**. Disponível em: https://www.google.com/amp/s/mundoeducacao.uol.com.br/amp/matematica/radiciacao.htm. Acesso em: 05 fev. 2022.

Potenciação e Radiciação. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.google.com/amp/s/www.todamateria.com.br/potenciacao/amp/. Acesso em: 05 fev. 2022.

Problemas sobre potenciação. **Doutor Matemático**. 2013. Disponível em: https://doutormatematico.blogspot.com/2013/06/problemas-sobre-potenciacao.html?m=1. Acesso em: 05 fev. 2022.

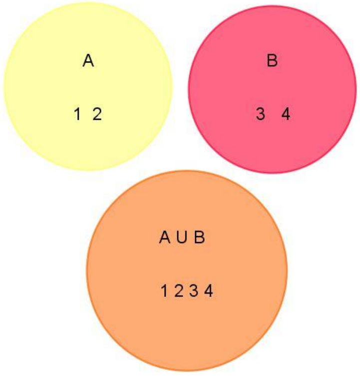
Prova FUVEST 2022 (2° fase) com Resolução. **Indagação**. Disponível em: https://www.indagacao.com.br/2022/01/prova-fuvest-2022-2-fase-com-resolucao.html. Acesso em: 05 fev. 2022.

SALES, Adriano. Conjuntos e conjuntos numéricos. Colégio Fato mais. Disponível em: http://www.colegiofatomais.com.br/adm/extras/AE130.03.18MatematicaLogicaProf.AdrianoSalesConjuntos.pdf04042019023929.pdf. Acesso em: 05 fev. 2022;

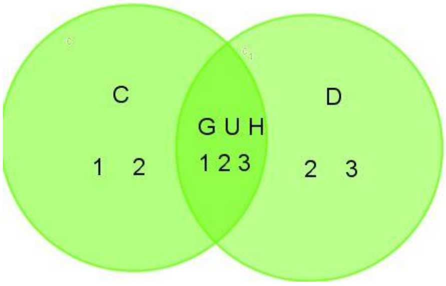
SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é radiciação? . **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-radiciacao.htm.Acesso em: 05 fev. 2022.

Apêndices:

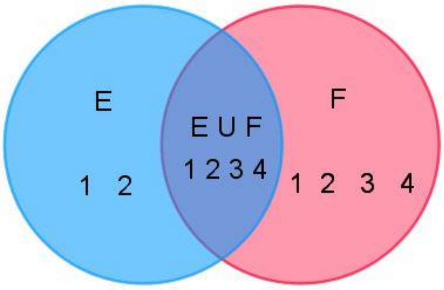
A)



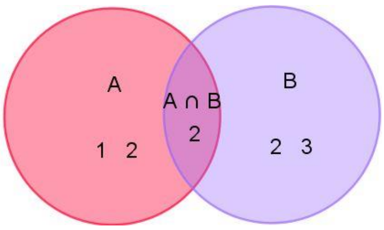
B)



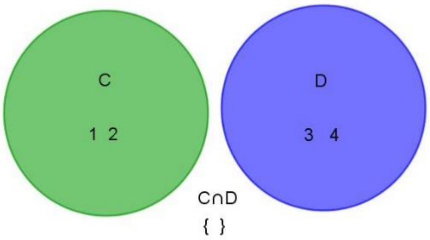
C)



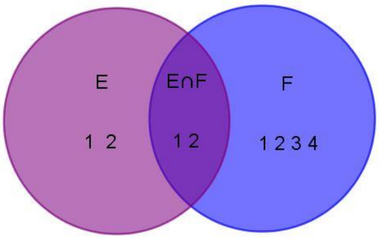
D)



E)


C
1 2
D
3 4
C∩D
{ }

F)


E
1 2
E∩F
1 2
F
1 2 3 4

G)


PROMAT – 2 ENCONTRO
Potenciação, Radiciação e Conjuntos
Professores Estagiários: André Luiz Z. da C.; Cleison R. Sotel e William Felipe de O. P.
Professora Orientadora: Arleni Elise S. L.
Resolução das atividades da aula anterior:
Resolução
ATIVIDADE 1
O período proposto é de 40 dias, sendo entregue 8 610 kg de ração para 12 300 frangos, e queremos descobrir a quantidade de quilogramas de ração será preciso para alimentar 20 000 frangos, podemos resolver através da regra de três, já que conhecemos três valores e precisamos encontrar um quarto.
Kg de ração quantidade de frangos
8 610 ––––––––– –12 300
x ––––––––– –20 000
12 300x = 172 200 000
12 300x ÷ 100 = 172 200 000 ÷ 100
123x = 1 722 000
x = 14 000
Logo, vai ser distribuído 14.000kg de ração que corresponde a alternativa E.
Resolução
ATIVIDADE 2
É preciso notar que existe uma razão entre a quantidade de telhas pela quantidade de tijolos, sendo 1500/1200.
Sabemos que 900 telhas já foram carregadas nesse caminhão, do total permitido 1500, podemos carregar ainda 1500 – 900 = 600 telhas. Vamos encontrar o equivalente a essa quantidade de telhas em tijolos, através da proporção.
Telhas Tijolos
1500 ––– –1200
600 ––– – x
1500x = 1200 * 600
1500x = 720000
1500x ÷ 100 = 720000 ÷ 100
15x = 7200
x = 480.
Logo, ele pode colocar em seu caminhão a quantidade de 480 tijolos, alternativa D
Resolução
ATIVIDADE 3
Km por hora Tempo de chegada
60 ––––––––– –5
100 ––––––––– –x
Se a velocidade do carro aumentou durante o percurso, é esperado que o tempo diminua. Assim, como um aumenta e o outro diminui, temos grandezas inversamente proporcionais.
Devemos inverter a ordem de uma das razões, ficando então:
Km por hora Tempo de chegada
60 ––––––––– –x
100 ––––––––– –5
100x = 60 * 5
100x = 300
x = 3
Logo, o tempo de chegada no destino será de 3 horas
Vamos jogar!!
#

1)Quanto vale $(4^2)^{\frac{1}{4}}$?

2)Quanto vale $(2^3)^{\frac{4}{3}}$?

3)Quanto vale $3^2 * 3^2 * 3^2$?

4) Quanto vale $\left(\sqrt[2]{\sqrt[2]{4} * \sqrt[2]{16}}\right)^2$?

5)Quanto vale $7^2 + 7^2 + 7^2$?

6)Quanto vale $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$?

7)Quanto vale $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$?

1)R: $4^{2*\frac{1}{4}} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

2)R: $2^{3*\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4*3}{3}} = 2^4 = 16$

3)R: $3^{2+2+2} = 3^6 = 729$

4)R: $(\sqrt[2]{2 * 4} = \left(\sqrt[2]{8}\right)^2 = 8$

5)R: $3 * 7^2 = 3 * 49 = 147$

6)R: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^6}} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

7)R: $\sqrt[4]{5^8} = \sqrt[4]{5^4 * 5^4} = 5 * 5 = 25$

8)Mariana tinha 121 balas e ela prometeu dar a raiz quadrada de suas balas a seu primo. Depois de dar as balas ao seu primo, deu ainda 27 balas a sua irmã mais nova. Com quantas balas ficou Mariana?

- R: $121 - \sqrt{121} - 27 = 121 - 11 - 27 = 83\ balas$

9)Quanto vale $(12^0 + 5^0)^2$?

10)Qual é a raiz quadrada de 625 ?

11)Quanto vale $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}$?

12)Quanto vale -2^5?

13)Qual é a raiz quadrada de 196?

14)Quanto vale $\frac{\sqrt[5]{100^5}}{5^{-1}}$?

15)Quanto vale $2^{\frac{2}{6}} * 2^{\frac{24}{6}} * 2^{-\frac{1}{6}}$?

16)Qual é a raiz quadrada de 225?

9)R: $(1+1)^2 = 4$

10)R: $\sqrt{625} = 25$

11) R: $2^{\frac{3}{2}*\frac{8}{3}} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

12)R: $-2^5 = -32$

13)R: $\sqrt{196} = 14$

14)R: $100^{\frac{5}{5}} * 5^1 = 100^1 * 5^1 = 500$

15) R: $2^{\frac{2}{6}+\frac{24}{6}-\frac{3}{6}} = 2^{\frac{24}{6}} = 2^4 = 16$

16)R: $\sqrt{225} = 15$

17)Em um estacionamento há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas e em cada roda há 4 parafusos. Qual é o total de parafusos desses 4 automóveis?

18)Quanto vale $(3 * 27)^{\frac{1}{4}}$?

19)Quanto vale $\left(3^2 * \left(\sqrt[3]{27}\right)^0 + 1\right)^2$?

20)Um gato come 5 ratos por dia. Quantos ratos, 5 gatos comem em 5 dias?

21)Quanto vale $24^{-5} * 24^7$?

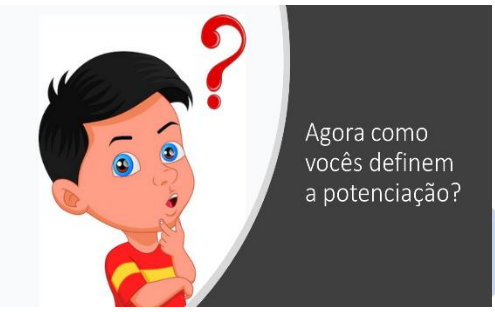
17)R: $4 * 4 * 4 = 64$

18) *R:* $(3 * 3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{4*\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$

19)R: $(9 * 1 + 1)^2 = 10^2 = 100$

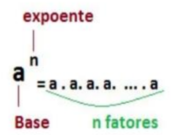
20)R: $5 * 5 * 5 = 125$

21) R: $24^{-5+7} = 24^2 = 576$



DEFINIÇÃO – Potenciação ou exponenciação

Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, denominada potência, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e o número n de expoente.



POTÊNCIAS DE 2	VALOR DAS POTÊNCIAS DE 2
2^{-4}	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
2^{-3}	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
2^{-2}	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
2^{-1}	$\frac{1}{2}$
2^0	1
2^1	2
2^2	$4 = 2 * 2$
2^3	$8 = 2 * 2 * 2$
2^4	$16 = 2 * 2 * 2 * 2$

Propriedades da potenciação

a) Exemplo: $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ *ou* $\left(\frac{2}{1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Potenciação de expoente negativo, invertemos sua base e também o sinal do expoente.

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, de outra forma $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

b) Exemplo: $2^2 * 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

Multiplicação de potências de bases iguais, mantém-se a base e soma-se os expoentes.

$$a^n . a^m = a^{m+n}$$

Propriedades da potenciação

c)Exemplo: $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$

Divisão de potências de bases iguais, mantém-se as bases e subtraem-se os expoentes.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

d)Exemplo: $(2^3)^2 = 2^{3*2} = 2^6$

Na potência de potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^n)^m = a^{m*n}$$

Propriedades da potenciação

e)Exemplo: $3^2 * 2^2 * 5^2 = (3 * 2 * 5)^2$

Potenciação de quando a base é um produto, multiplicam-se as bases e mantém-se os expoentes.

$$a^n * b^n * c^n = (a * b * c)^n$$

f)Exemplo: $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Potenciação quando a base é um quociente, divide-se a base e mantém-se o expoente.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ com b diferente de zero.

Casos que merecem atenção

$-a^2 = -(a * a) = -a^2$ $(-a)^2 = (-a) * (-a) = a^2$
$a^0 = 1$, mas 0^0 *é uma indeterminação* $\nexists$.

DEFINIÇÃO – Radiciação

Enquanto a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número racional diferente de zero, chamado de índice e b que é a raiz.

$$\sqrt[n]{\underbrace{x * x * x * x * \cdots * x}_{n\ vezes}} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Dizemos que a raiz é exata quando o resultado é um número inteiro e, não exato, se for um número irracional. O método mais comum para calcular as raízes é através da fatoração numérica do radicando em números primos.

Análise da tabela

$\sqrt[2]{2^6} = 8 = 2^3$	$\sqrt[2]{2^8} = 16 = 2^4$	$\sqrt[2]{2^{10}} = 32 = 2^5$	$\sqrt[2]{5^4} = 25 = 5^2$
$\sqrt[3]{2^6} = 4 = 2^2$	$\sqrt[3]{3^9} = 27 = 3^3$	$\sqrt[3]{4^3} = 4 = 4^1$	$\sqrt[3]{5^3} = 5 = 5^1$
$\sqrt[4]{3^{12}} = 27 = 3^3$	$\sqrt[4]{5^4} = 5 = 5^1$	$\sqrt[4]{5^8} = 25 = 5^2$	$\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$
$\sqrt[2]{2^3} =?$	$\sqrt[3]{2^4} =?$	$\sqrt[2]{3} =?$	$\sqrt[4]{5^2} =?$

$\sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ $\sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

Relação entre potências com expoente fracionário e a radiciação.

A raiz enésima pode ser transformada em uma potência com expoente racional. O índice (n) da raiz corresponde ao denominador, e o expoente (m) do radicando corresponde ao numerador.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propriedades da radiciação

Exemplo: $\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = 2$

a) A raiz de um número que está elevado a um expoente igual ao índice, é igual a esse próprio número.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplo: $\sqrt[4]{81 * 16} = \sqrt[4]{81} * \sqrt[4]{16}$

b) No produto de raízes de mesmo índice, multiplicam-se os radicandos dentro da raiz.

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

Exemplo: $\frac{\sqrt[2]{27}}{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{\frac{27}{3}} = \sqrt[2]{9} = 3$

c) Na divisão de raízes de mesmo índice, dividem-se os radicandos dentro da raiz.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Propriedades da radiciação

Exemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2*4]{256} = \sqrt[8]{256} = 2$

d) Na raiz da raiz, basta multiplicarmos os índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$$

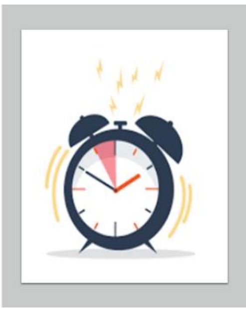
Exemplo: $\left(\sqrt[2]{16}\right)^2 = \sqrt[2]{16^2} = 16$

e) Na potência de uma raiz, elevamos o radicando pelo expoente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

INTERVALO (20 min)

- **9h40min às 10h**



O que vocês entendem por **CONJUNTO**?

Vocês conhecem algum exemplo de conjunto?

Exemplo:

Vamos relembrar as possíveis representações de um conjunto numérico

Como podemos representar o conjunto dos números ímpares de 1 até 10?

Enumerando os elementos:

$A = \{1,3,5,7,9\}$

Considerando uma propriedade dos elementos:

$$A = \{x |\ x\ \text{é um número ímpar de}\ 1\ \text{até o}\ 10\}$$

$$A = \{x |\ x = 2a + 1\ ; a \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 4\}$$

Desenhando a figura (Diagrama de Venn)

Atividade introdutória 2 (10 min)

(UFBA - Adaptado) Em uma enquete, várias pessoas foram entrevistadas acerca de suas preferências em relação a três esportes, Vôlei (V), Basquete (B) e Tênis (T), cujos dados estão indicados na tabela a seguir:

ESPORTE	*N° DE PESSOAS*
V	300
B	260
T	200
V e B	180
V e T	130
B e T	100
V, B e T	50
Nenhum	40

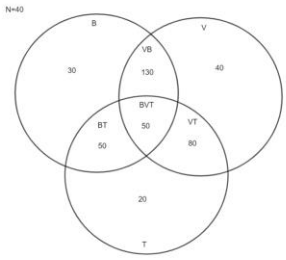
Fonte: Autores (2021)

De acordo com esses dados, é correto afirmar que, nessa enquete, o número de pessoas entrevistadas foi:

a) 400 b) 440 c) 490 d) 530

e) 570

Resolução:



TOTAL=N+V+B+T+BV+BT+VT+BVT = 40+40+30+20+130+50+50+80 = 440

Conjunto vazio: Conjunto sem nenhum elemento, representado por $A = \{\ \}$ ou $\emptyset$.

Conjunto unitário: Conjunto com um único elemento, por exemplo, $D = \{1\}$.

Conjunto ordenado: Conjunto no qual a ordem dos elementos importa, por exemplo, par ordenado do plano cartesiano $A = (1,2)$, trio ordenado $B = (1,2,3)$.

Conjunto universo: É o conjunto considerado para estudar determinada situação, por exemplo, para estudar a faixa salarial de empregados, precisamos conhecer o universo pesquisado $U = \{funcionários\ da\ empresa\}$.

Conjuntos finitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplo $A = \{2,4,6,8,10\}$ $B = \{Meses\ do\ ano\}$ $C = \{Vogais\ no\ alfabeto\}$.

Conjuntos infinitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots,100,\dots\}$, $\mathbb{R} = \{\dots,-1,\dots,-0{,}5,\dots,1,\dots,\pi,\dots,27,\dots\}$.

Relação de pertinência

Usamos o símbolo $\in$ para dizer que um elemento pertence a um conjunto, e $\notin$ para indicar que o elemento não pertence ao conjunto.

Exemplo: $2 \in \{1,2,3,4\}$, mas $5 \notin \{1,2,3,4\}$;

Dizemos que A é um subconjunto de B, se todos os elementos de A pertencem também a B. Com os subconjuntos vem a relação de inclusão entre conjuntos.

Relação de inclusão

Usamos o símbolo $\subset$ para dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, $A \subset B$, significa que todos os elementos do conjunto A vão estar no conjunto B. Já o símbolo $\supset$ indica que um conjunto contém outro, ou seja, $A \supset B$ indica que A contém todos os elementos de B.

Exemplo: $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $A = \{Meses\ com\ 30\ dias\}$, temos que $B \supset A$ e $A \subset B$.

União de conjuntos

Usando o símbolo U, dizemos que $A \cup B$, representa a união dos elementos do conjunto A com o de B.

Exemplos usando elementos numéricos;

$$A = \{1,2\}\ e\ B = \{3,4\}\ tem\ A \cup B = \{1,2,3,4\}$$

$$G = \{1,2\}\ e\ H = \{2,3\}\ tem\ G \cup H = \{1,2,3\}$$

$$E = \{1,2\}\ E\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E \cup F = \{1,2,3,4\}$$

Usando desenhos

interseção de conjuntos

Usando o símbolo $\cap$, dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B.

Exemplos usando números;

$$A = \{1,2\}\ e\ B = \{2,3\}\ tem\ C \cap D = \{2\}$$

$$C = \{1,2\}\ e\ D = \{3,4\}\ tem\ G \cap H = \{\ \}$$

$$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E \cap F = \{1,2\}$$

Usando desenhos

Diferença entre conjuntos

Com o símbolo de subtração, dizemos que $A - B$ é a diferença entre os conjuntos A e B. Ele é formado pelos elementos que pertencem a A e que não pertencem a B.

Exemplos

Usando números:

$$A = \{1,2\}\ e\ B = \{2,3\}\ tem\ A - B = \{1\}$$

$$C = \{1,2\}\ e\ D = \{3,4\}\ tem\ C - D = \{1,2\}$$

$$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2\}\ tem\ E - F = \{\ \}$$

Usando desenho:

Conjuntos complementares

O símbolo C_A^B indica o complementar de A em relação a B. Ele é derivado da ideia de diferença entre conjuntos, sendo igual a $C_A^B = A - B$. São todos os elementos que não pertencem ao conjunto B em relação ao conjunto A.

Exemplos usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{1\}\ tem\ C_A^B = \{2\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{1,2,3,4\}\ tem\ C_D^C = \{3,4\}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2\}\ tem\ C_E^F = \{\ \}$

Atividades sobre conjuntos

Atividades sobre operações com conjuntos

1-(PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A. Qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

a)0. b)2. c)3. d)4. e)5.

2 - (ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a

a)30. b)60. c)70. d)90. e)100

6.1. Resoluções das atividades;

Perguntas que serão utilizadas no jogo

1) Quanto vale $(4^2)^{\frac{1}{4}}$? $R:\ 4^{2*\frac{1}{4}} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

2) Quanto vale $(2^3)^{\frac{4}{3}}$? $R:\ 2^{3*\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4*3}{3}} = 2^4 = 16$

3) Quanto vale $3^2 * 3^2 * 3^2$? $R: 3^{2+2+2} = 3^6 = 729$

4) Quanto vale $\left(\sqrt[2]{\sqrt{4} * \sqrt{16}}\right)^2$? $R: \left(\sqrt[2]{2 * 4}\right)^2 = \left(\sqrt[2]{8}\right)^2 = 8$

5) Quanto vale $7^2 + 7^2 + 7^2$? $R:\ 3 * 7^2 = 3 * 49 = 147$

6) Quanto vale $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$? $R:\ \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^6}} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

7) Quanto vale $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$? $R:\ \sqrt[4]{5^8} = \sqrt[4]{5^4 * 5^4} = 5 * 5 = 25$

8) Mariana tinha 121 balas e prometeu dar a raiz quadrada de suas balas a seu primo. Depois de dar as balas ao seu primo, deu ainda 27 balas a sua irmã mais nova. Com quantas balas ficou Mariana?

$R: 121 - \sqrt{121} - 27 = 83$

9) Quanto vale $(12^0 + 5^0)^2$? $R: (9 * 1 + 1)^2 = 100$

10) Qual é a raiz quadrada de 625 ? $R: \sqrt{625} = 25$

11) Quanto vale $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}$? $R:\ 2^{\frac{3}{2}*\frac{8}{3}} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

12) Quanto vale -2^5? $R:\ -2^5 = -32$

13) Qual é a raiz quadrada de 196? $R: \sqrt{196} = 14$

14) Quanto vale $\frac{\sqrt[5]{100^5}}{5^{-1}}$? $R: 100^{\frac{5}{5}} * 5^1 = 100^1 * 5^1 = 500$

15) Quanto vale $2^{\frac{2}{6}} * 2^{\frac{24}{6}} * 2^{-\frac{1}{6}}$? $R: 2^{\frac{2}{6}+\frac{24}{6}-\frac{3}{6}} = 2^{\frac{24}{6}} = 2^4 = 16$

16) Qual é a raiz quadrada de 225? $R: \sqrt{225} = 15$

17) Em um estacionamento há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas e em cada roda há 4 parafusos. Qual é o total de parafusos desses 4 automóveis? $R: 4 * 4 * 4 = 4^3 = 64$

18) Quanto vale $(3 * 27)^{\frac{1}{4}}$? $R: (3 * 3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{4*\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$

19) Quanto vale $\left(3^2 * \left(\sqrt[3]{127}\right)^0 + 1\right)^2$ $R: (9 * 1 + 1)^2 = 10^2 = 100$

20) Um gato come 5 ratos por dia. Quantos ratos, 5 gatos comem em 5 dias? $R: 5 * 5 * 5 = 5^3 = 125$

21) Quanto vale $24^{-5} * 24^7$? $R: 24^{-5+7} = 24^2 = 576$

Atividade introdutória

(UFBA - Adaptado) Em uma enquete, várias pessoas foram entrevistadas acerca de suas preferências em relação a três esportes, Vôlei (V), Basquete (B) e Tênis (T), cujos dados estão indicados na tabela a seguir:

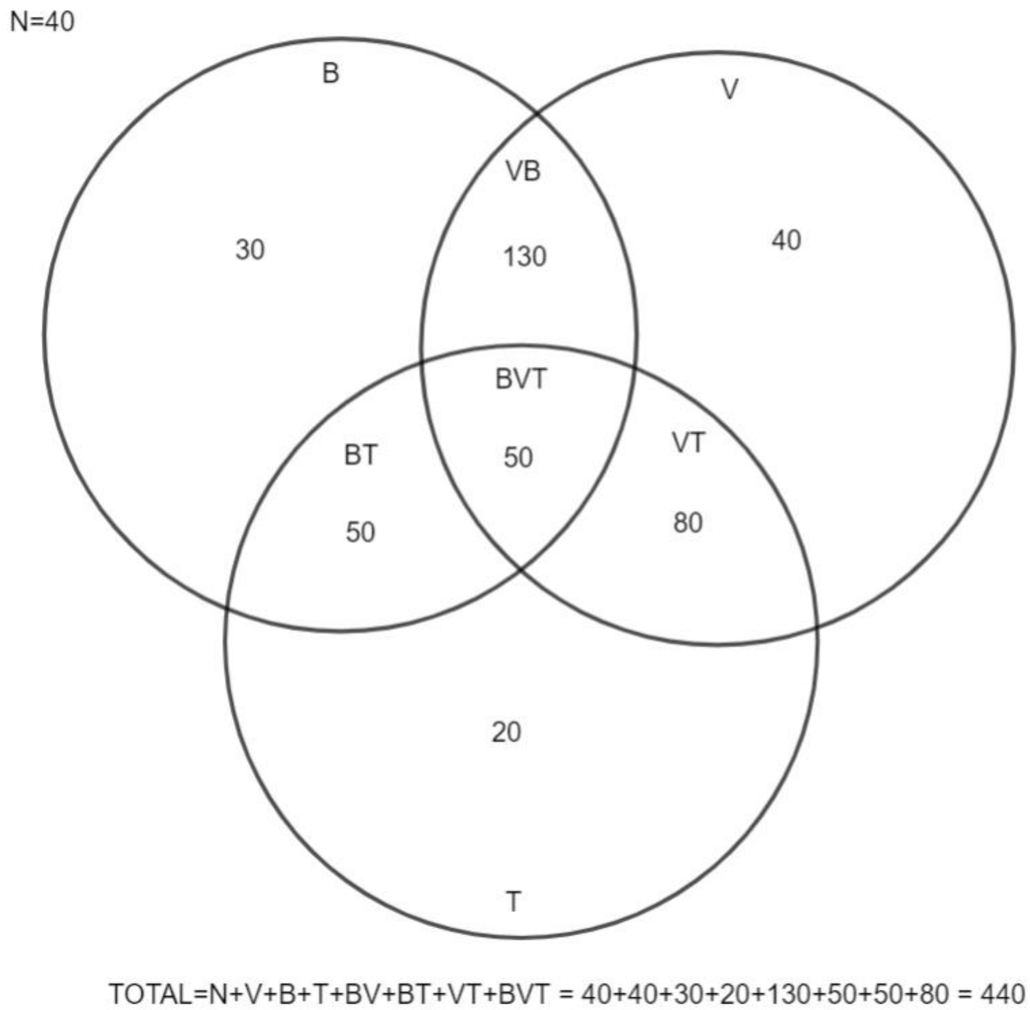
ESPORTE	*N° DE PESSOAS*
V	300
B	260
T	200
V e B	180
V e T	130
B e T	100
V, B e T	50
Nenhum	40

Fonte: Autores (2021)

De acordo com esses dados, é correto afirmar que, nessa enquete, o número de pessoas entrevistadas foi:

a) 400 b) 440 c) 490 d) 530 e) 570

Criando um diagrama de Venn:



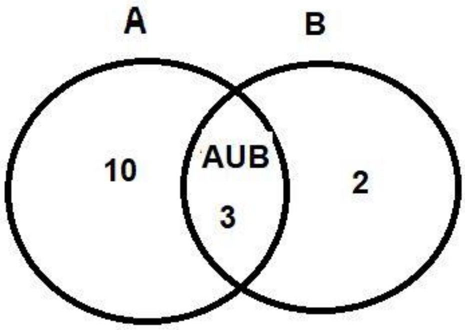
Atividades sobre operações com conjuntos (20 min)

1 - (PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A. Qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

a)0. b)2. c)3. d)4. e)5.

R:

Na nossa pesquisa, não há pessoas que não utilizam os dois produtos. Se 10 pessoas não utilizam B é porque elas utilizam somente A. Se duas pessoas não utilizam A é porque utilizam o produto B.



Logo, só sobraram três pessoas que devem utilizar A e B. Alternativa c.

2 - (ENEM 2020 adaptado) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

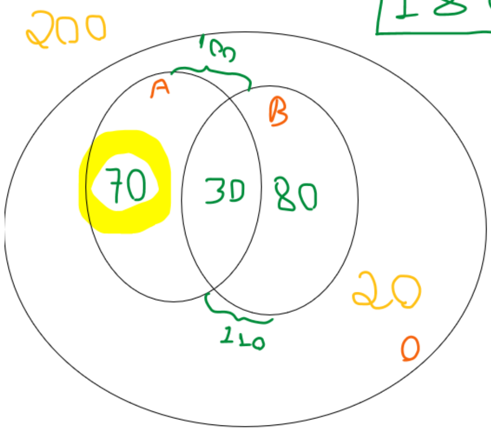
- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem apenas o tipo sanguíneo A é igual a:

a)30. b)60. c)70. d)90. e)100.

$\boxed{180}$



$A + AB = 100$ (1)

$B + AB = 110$ (2)

$A + AB + B = 180$ (3)

(2) em (3) $A + 110 = 180$

$A = 180 - 110$

$A = 70$

6.2. Material entregue aos alunos;

DEFINIÇÃO – Potenciação ou exponenciação: Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, denominada potência, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e o n de expoente.

Propriedades da potenciação

Exemplo: $2^2 * 2^3 = 2^5$

Multiplicação de potências de bases iguais, mantém-se a base e somam-se os expoentes.

$a^n.a^m = a^{m+n}$

Exemplo: $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$

Divisão de potências de bases iguais, mantém-se as bases e subtraem-se os expoentes.

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Exemplo: $(2^3)^2 = 2^{3*2} = 2^6$

Na potência de uma potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(a^n)^m = a^{m*n}$

Exemplo: $3^2 * 2^2 * 5^2 = (3 * 2 * 5)^2$

Potenciação de quando a base é um produto, multiplicam-se as bases e mantém-se os expoentes.

$a^n * b^n * c^n = (a * b * c)^n$

Exemplo: $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Potenciação de quando a base é um quociente, divide-se a base e mantém-se o expoente.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$com b diferente de zero.

Exemplos: $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}\ e\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

Potenciação de expoente negativo, invertemos a base e também o sinal do expoente.

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, de outra forma $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

DEFINIÇÃO – Radiciação: Enquanto a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número real diferente de zero, chamado de índice e b que é a raiz.

$$\underbrace{\sqrt[n]{x * x * x * x * \dots * x}}_{n\ vezes} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Dizemos que a raiz é exata quando o resultado é um número inteiro e, não exato, se for um número irracional. O método mais comum para calcular as raízes é através da fatoração numérica do radicando em números primos.

$\sqrt[2]{2^6} = 8 = 2^3$	$\sqrt[2]{2^8} = 16 = 2^4$	$\sqrt[2]{2^{10}} = 32 = 2^5$	$\sqrt[2]{5^4} = 25 = 5^2$
$\sqrt[3]{2^6} = 4 = 2^2$	$\sqrt[3]{3^9} = 27 = 3^3$	$\sqrt[3]{4^3} = 4 = 4^1$	$\sqrt[3]{5^3} = 5 = 5^1$

$\sqrt[4]{3^{12}} = 27 = 3^3$	$\sqrt[4]{5^4} = 5 = 5^1$	$\sqrt[4]{5^8} = 25 = 5^2$	$\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$
$\sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$	$\sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

Relação entre potências com expoente fracionário e a radiciação

A raiz enésima pode ser transformada em uma potência com expoente racional. O índice (n) da raiz corresponde ao denominador, e o expoente (m) do radicando corresponde ao numerador.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exemplo: $\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = 2$

Propriedades da radiciação

a) A raiz de um número que está elevado a um expoente igual ao índice, é igual a esse próprio número

$\sqrt[n]{a^n} = a$

Exemplo: $\sqrt[4]{81 * 16} = \sqrt[4]{81} * \sqrt[4]{16}$

b) No produto de raízes de mesmo índice, multiplicam-se os radicandos dentro da raiz.

$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

Exemplo: $\frac{\sqrt[2]{27}}{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{\frac{27}{3}} = \sqrt[2]{9} = 3$

c) Na divisão de raízes de mesmo índice, dividem-se os radicandos dentro da raiz.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Exemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2*4]{256} = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

d) Na raiz da raiz, basta multiplicarmos os índices.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$

Exemplo: $\left(\sqrt[2]{16}\right)^2 = \sqrt[2]{16^2} = 16$

e) Na potência de uma raiz, elevamos o radicando pelo expoente.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Atividade introdutória:

(UFBA - Adaptado) Em uma enquete, várias pessoas foram entrevistadas acerca de suas preferências em relação a três esportes, Vôlei (V), Basquete (B) e Tênis (T), cujos dados estão indicados na tabela a seguir:

ESPORTE	*N° DE PESSOAS*
V	300
B	260
T	200
V e B	180
V e T	130
B e T	100
V, B e T	50
Nenhum	40

De acordo com esses dados, é correto afirmar que, nessa enquete, o número de pessoas entrevistadas foi:

a) 400 b) 440 c) 490 d) 530 e) 570

Fonte: Autores (2021)

Conjuntos unitários: Conjunto com um único elemento, exemplo, $D = \{1\}$.

Conjuntos ordenados: Conjunto no qual a ordem dos elementos importa, por exemplo, par ordenado do plano cartesiano $A = (1,2)$, trio ordenado $B = (1,2,3)$.

Conjunto universo: É o conjunto considerado para estudar determinada situação, por exemplo, para estudar a faixa salarial de empregados, precisamos conhecer o universo pesquisado $U = \{funcionários\ da\ empresa\}$.

Conjuntos finitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplo $A = \{\ 2, 4, 6, 8, 10\}\ \ B = \{Meses\ do\ ano\}\ \ C = \{\ Vogais\ no\ alfabeto\}$

Conjuntos infinitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots ,100, \dots\}$, $\mathbb{R} = \{\dots , -1, \dots , -0{,}5, \dots ,1, \dots , \pi, \dots , 27, \dots\}$

Relação de pertinência

Usamos o símbolo $\in$ para dizer que um elemento pertence a um conjunto, e $\notin$ para indicar que o elemento não pertence ao conjunto.

Exemplo: $2\ \in \{1,2,3,4\}$, mas $5 \notin\ \{1,2,3,4\}$;

Dizemos que A é um subconjunto de B, se todos os elementos de A pertencem também a B. Com os subconjuntos vem a relação de inclusão entre conjuntos.

Relação de inclusão

Usamos o símbolo $\subset$ para dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, $A \subset B$, significa que todos os elementos do conjunto A vai estar no conjunto B. Já o símbolo $\supset$ indica que um conjunto contém outro, ou seja, $A\ \supset B$ indica que A contém todos os elementos de B.

Exemplo: $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $A = \{Meses\ com\ 30\ dias\}$, temos que $B \subset A\ e\ A \subset B$.

União de conjuntos

Usando o símbolo U, dizemos que $A \cup B$, representa a união dos elementos do conjunto A com o de B.

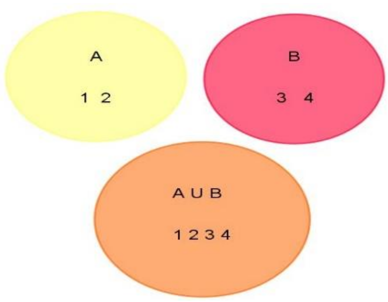
Exemplos usando elementos numéricos;

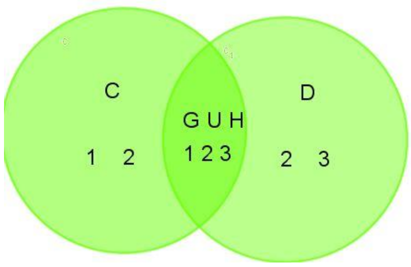
$A = \{1,2\}\ e\ B = \{3,4\}\ tem\ A \cup B = \{1,2,3,4\}$

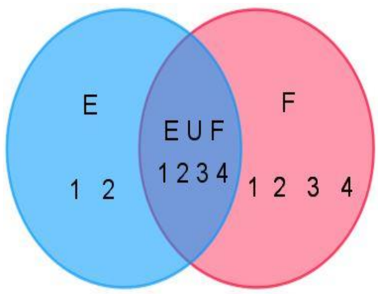
$G = \{1,2\}\ e\ H = \{2,3\}\ tem\ G \cup H = \{1,2,3\}$

$E = \{1,2\}\ E\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E \cup F = \{1,2,3,4\}$

Usando desenhos:







interseção de conjuntos

Usando o símbolo $\cap$, dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B.

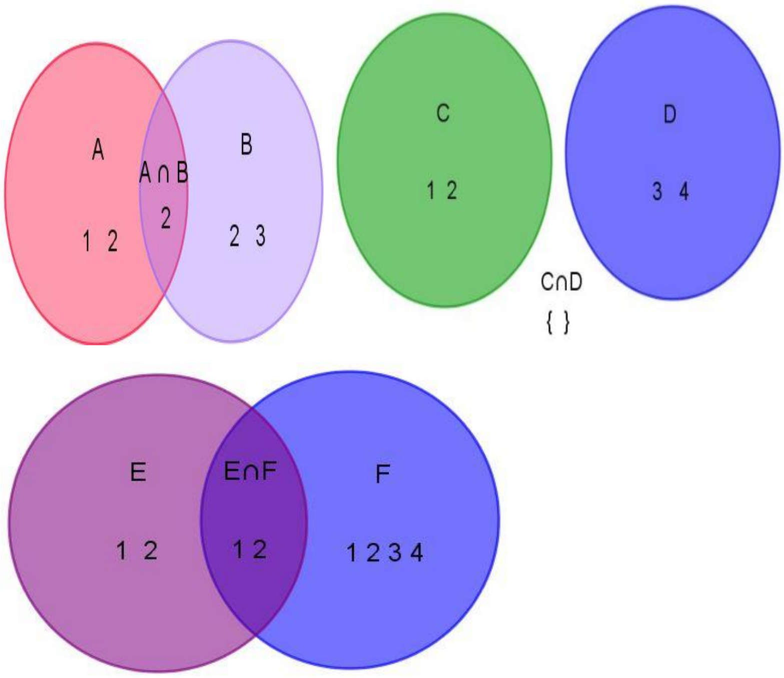
Exemplos usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{2,3\}\ tem\ C \cap D = \{2\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{3,4\}\ tem\ G \cap H = \{\ \}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2,3,4\}\ tem\ E \cap F = \{1,2\}$

Usando desenhos:



Diferença entre conjuntos

Com o símbolo de subtração, dizemos que $A - B$ é a diferença entre os conjuntos A e B. Ele é formado pelos elementos que pertencem a A e que não pertencem a B.

Exemplos

Usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{2,3\}\ tem\ A - B = \{1\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{3,4\}\ tem\ C - D = \{1,2\}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2,\}\ tem\ E - F = \{\ \}$

Conjuntos complementares

O símbolo C_A^B indica o complementar de A em relação a B. Ele é derivado da ideia de diferença entre conjuntos, sendo igual a $C_A^B = A - B$. São todos os elementos que não pertencem ao conjunto B em relação ao conjunto A.

Exemplos usando números;

$A = \{1,2\}\ e\ B = \{1\}\ tem\ C_A^B = \{2\}$

$C = \{1,2\}\ e\ D = \{1,2,3,4\}\ tem\ C_D^C = \{3,4\}$

$E = \{1,2\}\ e\ F = \{1,2\}\ tem\ C_E^F = \{\ \}$

Atividades:

1-(PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A. Qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

a)0. b)2. c)3. d)4. e)5.

2-(ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a

a)30. b)60. c)70. d)90. e)100

6.3. Relatório;

Encontro 2 12/03/2022

Relatório 2 - Sala A103

Grupo de estagiários: André Luiz Z. da C.; Cleison Sotel; William Pinheiro

No dia 12 de março de 2022, no período da manhã, foi realizado o segundo encontro do Promat. Tivemos a participação de alguns alunos que não estavam no primeiro encontro, e que se sentiram um pouco deslocados, pois perderam as apresentações e a aula anterior. Compareceram 13 dos 20 que vieram no primeiro encontro, cinco participaram pela primeira vez, e duas alunas entre eles não estavam inscritas em nossa sala. Nesse encontro, eles foram separados em grupos de cinco ou seis.

O conteúdo da aula, foi potenciação, radiciação e conjuntos. No primeiro momento da aula, resolvemos as três questões que faltavam da semana passada sobre razão e proporção, e então começamos a trabalhar com potenciação e radiciação.

Iniciamos propondo um jogo da velha, em que eram apresentadas operações de potenciação e radiciação nas lâminas do Power Point. Os grupos de seis foram separados em subgrupos de três, e os grupos de cinco em subgrupos de dois e três estudantes. Conforme eram apresentadas as operações, se um determinado subgrupo acertasse suas resoluções, eles poderiam marcar com um x ou bolinha no cardinal que eles haviam construído.

Notamos uma grande dificuldade dos alunos em realizar as operações, como em realizar a potência dá potência ou fazer a multiplicação de raízes, mas apesar de ficarem meio perdidos, eles mostram o desejo de querer realizar essas operações e se puseram a fazê-las com nosso auxílio. As primeira duas perguntas trabalhavam a potenciação de uma potência, e foram as que eles mostraram uma maior dificuldade, porque não lembravam como usar a propriedade. Através de questionamentos e exemplos auxiliares, os alunos conseguiram resolvê-las e mostraram uma maior facilidade posteriormente com as operações de potenciação. Nas perguntas quatro e seis sobre radiciação, eles mostraram uma dificuldade para prosseguir com a resolução, porque essas perguntas trabalhavam com a raiz de uma raiz e multiplicação de raízes, mas depois darmos um tempo maior para resolução e explicarmos algumas dúvidas sobre o modo que estavam resolvendo, conseguiram produzir caminhos de resolução, como resolver a raiz de dentro e depois seguir para a exterior. Os vencedores, decidimos premiá-los com doces que havia sobrados do encontro anterior. Foi programado 40 minutos para essa atividade, mas levou entorno de 60 minutos para concluirmos. Nesse jogo, pudemos perceber como eles entendiam e calculavam a potenciação e radiciação, identificamos seus principais obstáculos e conseguimos orientá-los devidamente. Sentimos que após nossas explicações, os alunos que apresentavam dúvidas conseguiram compreender as operações e seguir com suas resoluções, mostrando um desenvolvimento da aprendizagem.

Em seguida, passamos para a exposição das propriedades das potências, através das lâminas. Apresentamos a definição desses dois conteúdos e explicamos suas propriedades, convidando sempre a interação dos alunos. Íamos questionando sobre cada passo, buscando sempre justificar para eles o porquê cada uma é válida. O objetivo é que possam não decorar cada propriedade, nem mesmo criar ou manter macetes trazidos recorrentemente em mídias sociais, mas que entendam o porquê de cada propriedade. Provavelmente assim o aluno conseguirá até mesmo ir além do que está sendo exposto e, aplicar essa compreensão em outras questões que julgar necessário. Feito isto, dispensamos os alunos para o intervalo.

Ao voltar do intervalo, concluímos a explicação das propriedades das potências, incluindo a explicação de três casos específicos que julgamos motivo recorrentes de erro em diversas situações sendo eles: -a^2 = -(a.a), (-a)^2=(-a).(-a) = a.a e 0^0 não existe. Então passamos para as propriedades da radiciação. Infelizmente tivemos que deixar esse conteúdo para este momento devido ao atraso no tempo. Ele fora planejado para ser abordado antes do intervalo. Na sequência explicamos tais propriedades novamente buscando a interação deles para explicá-las, além de justificar cada uma, trazendo a definição para que observem o que ocorre a cada passo e, por fim, apresentar a propriedade propriamente dita.

Para o último momento trabalhamos com Conjuntos. Iniciamos com uma proposta de resolução de uma questão do ENEM. Essa questão estava impressa no material entregue aos alunos. Nós ficamos auxiliando os grupos na resolução, atendendo os que apresentaram dúvidas, sobre interpretação dos dados apresentados no problema e ainda se devem somar cada valor ou subtrair, quase sempre sem primeiro buscar interpretar os dados. Após algum tempo prestando ajuda aos grupos, seguimos para a correção do problema no quadro.

O que ocorreu conforme planejamos, seguimos para um questionamento aos alunos sobre o que cada um entende por conjunto, houve ausência de exposições dos alunos, talvez por conta de timidez, ou receio devido ao fato de estarmos iniciando um novo conteúdo. Então, exploramos alguns exemplos de conjuntos, tentando fazer com que entendessem o que significa um conjunto. Então voltamos para a apresentação das lâminas, nas quais destacamos e explicamos cada peculiaridade de cada conjunto, a partir de exemplos. Mostramos a ideia de conjunto unitário, vazio, finito, infinito e conjunto não ordenado, ainda expusemos de modo formal algumas representações de conjuntos. Na sequência as relações entre conjunto foram trabalhadas, em lâminas expusemos e explicamos cada relação e operação. Devido ao avanço do tempo priorizamos a abordagem dos exercícios. Pedimos que pensassem a respeito deles e, se pudessem, os resolvessem para o próximo encontro.

Neste encontro já percebemos que estávamos mais tranquilos em relação ao anterior, o que ficou perceptível na clareza com que fomos expondo as ideias. Notamos que os alunos também estavam nesta situação, mais à vontade talvez devido a ser o segundo encontro que se fez no ambiente. Contudo, tivemos novos alunos, que não estiveram presentes no primeiro encontro e que ainda pareciam deslocados.

Não podemos deixar de lado as considerações que as orientadoras nos apresentaram, sempre buscamos segui-las e, já neste encontro, tentamos nos adequar e, notamos avanços pessoais: como sempre usar o apagador, alinhar o traço da fração com o sinal da igualdade, falar voltados para os alunos e apresentar o conteúdo com mais segurança. Embora ainda tenhamos muito que aprender, estamos dispostos a isto.

7. **Encontro 3: Plano de aula;**

3º Encontro - 19 de março de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Polinômios; produtos notáveis e fatoração algébrica.

Objetivo geral: Compreender e desenvolver o conceito de polinômio, sua utilização e operações. Além da sua relação com a fatoração de expressões algébricas e produtos notáveis.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes, ao final dessa aula, de:

- Compreender o conceito de monômio e polinômio, suas operações e aplicações em problemas matemáticos;
- Calcular o valor numérico de um polinômio;
- Identificar o grau de um polinômio qualquer;
- Fatorar expressões algébricas por evidência de um fator comum e por agrupamento.
- Compreender o conceito, visualizar geometricamente, fatorar e aplicar produtos notáveis na realização de cálculos.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, Projetor, *Power Point*, folhas sulfite.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que os alunos adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Nessa aula, procuraremos negociar a não utilização da calculadora, com o objetivo de estimular o cálculo mental e o uso de estratégias que facilitem e agilizem os cálculos. Isso se deve ao ENEM e outros vestibulares não permitirem seu uso.

Utilizaremos o projetor no decorrer da aula para deixá-la mais dinâmica, apresentando os conteúdos em lâminas previamente preparadas. A resolução de tarefas ou anotações de exemplos será feita no quadro.

Os alunos serão organizados em grupos de cinco elementos, facilitando o atendimento às dúvidas. A primeira folha será entregue após o exercício sobre multiplicação de polinômios, antes do intervalo. Já a segunda folha, será entregue no momento anterior da atividade sobre polinômios, ao final da aula.

Introduziremos o conteúdo de polinômios a partir de um problema do ENEM de 2012 que relaciona o estudo da área do retângulo com as operações de soma e multiplicação de polinômios, com o objetivo de explorar os conhecimentos prévios dos discentes.

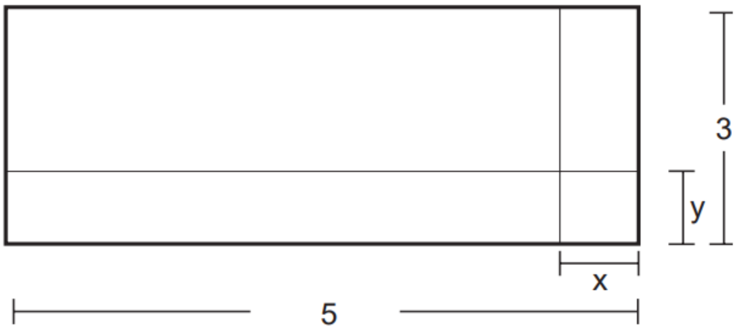
Conforme vão resolvendo, os estagiários circularão pela sala respondendo suas dúvidas com novos questionamentos, como por exemplo, perguntando qual é a incógnita da questão, e assim orientando-os no desenvolvimento da tarefa, sem lhes dar a resposta.

1ª Atividade introdutória sobre polinômios (25 min)

Atividade introdutória 1 (15min)

1) (**ENEM - 2012**) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).

Figura 3: Representação de um tecido geométrico.



Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

A) $2xy$ B) $15 - 3x$ C) $15 - 5y$ D) $-5y - 3x$ E) $5y + 3x - xy$

Após o tempo proposto de 15 minutos para resolução, convidaremos um aluno para explicar sua resolução oralmente, enquanto um estagiário escreverá os passos executados, no quadro. Um tempo de 10 minutos será dado para a resolução no quadro e discussão do problema.

2ª Exploração de ideias e definição Monômios e Polinômios. (25 min)

No próximo momento, será feita uma série de perguntas aos alunos para introduzi-los ao tema principal da aula e, ajudá-los a relembrar o que aprenderam no ensino fundamental. Vale ressaltar que também objetivamos entender a maneira como eles compreendem esse conteúdo e, se há uma distinção entre essas ideias.

Perguntas para os alunos

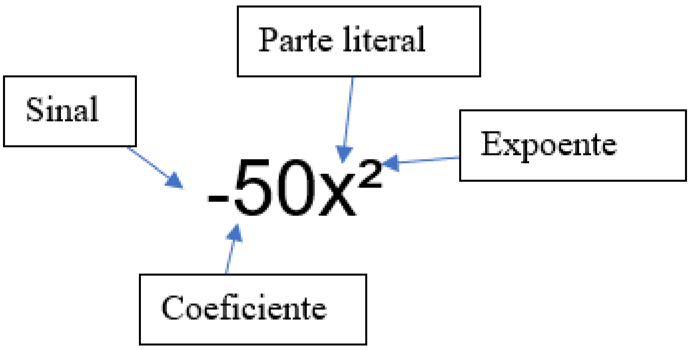
1- O que é um monômio?
2- O que é um binômio e um trinômio?
3- O que é um polinômio?
4- Qual é a diferença entre uma expressão algébrica e uma expressão numérica?

A cada pergunta será apresentada a eles uma ideia da real definição, ajustando as ideias expostas pelos alunos.

Após exporem a maneira que pensam esse conteúdo, formalizaremos a ideia de monômios e polinômios, apresentando a eles suas definições e perguntando exemplos simples para cada definição. Caso eles não apresentem nenhum exemplo usaremos os que estão abaixo.

Definição Monômio: Um monômio, ou um termo algébrico é toda expressão algébrica da forma ax^n , sendo a um número real, x uma variável e n um número natural. Um monômio é dividido em duas partes, o número que é chamado de coeficiente numérico e a variável ou o produto de variáveis chamados parte literal. Divisões por variáveis e, variáveis com expoente fracionário ou negativo, não são considerados monômios.

Figura 4: Composição da potenciação.



Fonte: Autores (2022).

Exemplos de monômios:

a) $5x^2$
b) $456b^3$
c) $17xy^2$

Exemplos de não monômios:

a) $\frac{x+y}{x}$
b) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$
c) x^2+1
d) $x^{\frac{2}{3}}$
e) $x^{-2}+3$

Definição de polinômios: Uma função polinomial ou simplesmente polinômio, tem como forma geral $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Cada termo é um monômio separado por uma operação de soma ou subtração. Polinômios com apenas dois termos são chamados de binômios e polinômios com três termos são chamados de trinômios.

O valor numérico do polinômio $P(x)$, para $x = b$ é o número que se obtém substituindo x por b e efetuando as operações indicadas pela relação.

Exemplos:

a) $P(x) = 64x^2 + 8x$ $\quad P(1) = 64 * 1 + 8 * 1 = 72$
b) $P(y) = 81$ $\quad P(13) = 81$
c) $P(x) = 21x^2 + x + 2$ $\quad P(0) = 21 * 0^2 + 0 + 2 = 2$
d) $P(x) = x^4 - 23x^3 + 12x^2 - x + 2$ $\quad P(1) = 1^4 - 23 * 1^3 + 12 * 1^2$

Nesse momento, perguntaremos o que eles entendem por grau de um polinômio e, se poderiam dar um exemplo simples de um polinômio e seu grau. Caso não apresentem nenhum exemplo, pediremos que tentem identificar o grau dos polinômios abaixo.

Grau do polinômio: O grau do polinômio é dado pelo grau do maior de seus monômios, e o grau de um monômio se dará através da soma dos expoentes da parte literal desse termo.

Exemplos:

a) $A(x, y, z) = x^2y^5z + x^7 - z^2 \; possui \; grau \; 8 = 2 + 5 + 1$
b) $B(a, b, c) = abc + d^2 \; possui \; grau \; 3 = 1 + 1 + 1$
c) $C(x) = 21 \; possui \; grau \; zero \; (ausência \; da \; parte \; literal)$
d) $D(x, y) = xy^3 + 8xy + x^2y \; tem \; grau \; 4 = 1 + 3$

3ª Operações com polinômios (40 min)

Pediremos que deem exemplos de polinômios para escrevermos no quadro, para que depois façam a soma e subtração desses exemplos. Caso faltem exemplos, usaremos esses abaixo.

Exemplos:

a) $P(x) + Q(x) = T(x) = (x + 2) + (-x^2 + 34x + 9) = -x^2 + 35x + 11$

b) $P(x) - Q(x) + R(x) = T(x) = (89x^4 + x) - (27 - x) + (x^5 + 14x^4) = x^5 + 103x^4 + 2x - 27$

Soma e subtração: A soma (subtração) de dois ou mais polinômios é um polinômio cujos termos são a soma (subtração) algébrica dos termos semelhantes dos polinômios que estão sendo somados (subtraídos).

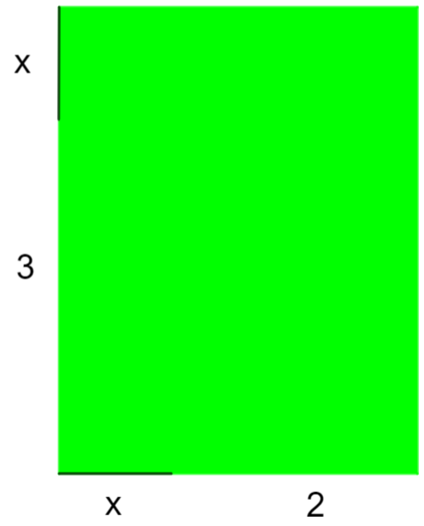
Para discutirmos a multiplicação de polinômios, exploraremos um exercício envolvendo área. Após o tempo de 10 minutos para a resolução, convidaremos um aluno a apresentar sua estratégia de resolução no quadro; caso ninguém se ofereça pediremos apenas para falarem como resolveram o exercício.

Multiplicação: Ela é totalmente fundamentada na propriedade distributiva. Sendo necessário multiplicar cada monômio do primeiro polinômio por todos os monômios do segundo, observado os sinais dos resultados.

Exercício:

Sabendo que a área do retângulo abaixo é de $12\,cm^2$, calcule o valor do comprimento x

Figura 5: Retângulo para produto da soma.



Fonte: Autores (2022).

Ao final do exercício sobre multiplicação com polinômios, vamos entregar a primeira folha, contendo um resumo da primeira parte.

4º Intervalo: (20 min)

5ª Continuação de operações: Operação de divisões (25 min)

Antes de comentar sobre a divisão de polinômios, vamos começar comentando sobre a divisão euclidiana, revendo seus principais elementos como o divisor, dividendo, quociente, resto e sua utilização. Tudo com o objetivo de fazer uma analogia com a divisão de polinômios que ocorre no mesmo formato.

Divisão de polinômios: A divisão de polinômios é feita usando o método comum da chave, exatamente como ocorre na divisão aritmética. Essa operação é útil para descobrir a forma fatorada do polinômio. Devemos dividir um polinômio por um de grau menor.

Exemplo:

1) Qual é o quociente da divisão polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ pelo polinômio $D(x) = x + 1$.

Figura 6: Representação de divisão de polinômios.

$$
\begin{array}{l|l}
P(X) & D(X) \\ \cline{2-2}
Q(x) & R(X)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3+7x^2+15x+9 & x+1 \\ \cline{3-3}
- & x^3+x^2+0+0 & x^2+6x+9 \\ \cline{2-2}
 & 0+6x^2+15x+9 & \\
- & 6x^2+6x+0 & \\ \cline{2-2}
 & 0+9x+9 & \\
- & 9x+9 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Fonte: Autores (2022).

Logo, o polinômio $P(x)$ pode ser escrito na forma de multiplicação entre o polinômio divisor e o polinômio quociente, $P(X) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (x+1)(x^2 + 6x + 9)$.

Após esse exemplo, pediremos que falem um polinômio de grau dois e outro de grau um para escrevermos no quadro. Eles deverão realizar a divisão entre os polinômios sugeridos. Após um breve tempo de resolução, um estagiária iria realizar a divisão na lousa.

6ª Fatoração de polinômios. (20 min)

Fatoração de polinômios: É o processo utilizado na matemática para expressar um número ou uma expressão algébrica como produto de fatores. Os principais métodos de fatoração algébrica são: fatoração por evidência e fatoração por agrupamento.

Nesse momento, pediremos que deem dois exemplos de binômios para os escrevermos no quadro. Em seguida, perguntaremos à sala se haveria um fator que fosse comum entre os binômios e como poderíamos expressar esses binômios com o fator comum separado dos demais termos. Nosso objetivo com isso é fazê-los perceber a fatoração dos binômios, colocando o fator comum em evidência.

Fatoração por evidência: Quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio, seja ele apenas um número ou uma letra ou ambos, será colocado fora dos parênteses e dentro estará o resultado da divisão da expressão pelo fator comum.

Exemplos

a) $12x^2 + 3x^4$ tem $3x^2$ como fator comum, então, a forma fatorada seria $3x^2(4 + x^2)$.
b) $7 - 49x^3$ tem 7 como fator comum, então, a forma fatorada seria $7(1 - 7x^3)$

Fatoração por agrupamento: Quando o polinômio possuí fator que não está presente em todos os termos, devemos identificar os termos que podem ser agrupados por fatores comuns. Nesse tipo de fatoração, colocamos os fatores comuns dos agrupamentos em evidência.

Exercício

1) Fatore por agrupamento as seguintes expressões algébricas:
   a) $x^2 + 3x + x^2y + 3xy$

b) $ab + 3b + 7a + 21$

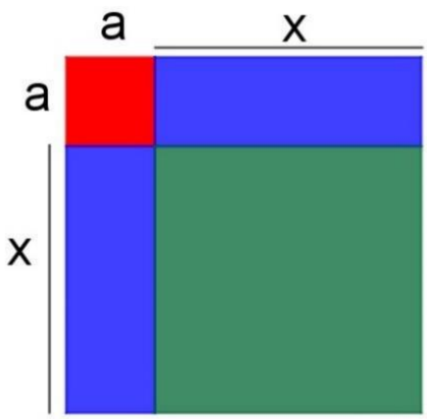
c) $2xb - 12x + 3by - 18y$

7º Produtos notáveis e sua relação com a fatoração. (35 min)

Em seguida, com o objetivo de introduzir os produtos notáveis, faremos um estudo das áreas de quadrados perfeitos para explorar os produtos notáveis por meio de três questões.

1- Dado o quadrado abaixo, responda:

Figura 7: Representação produto da soma.

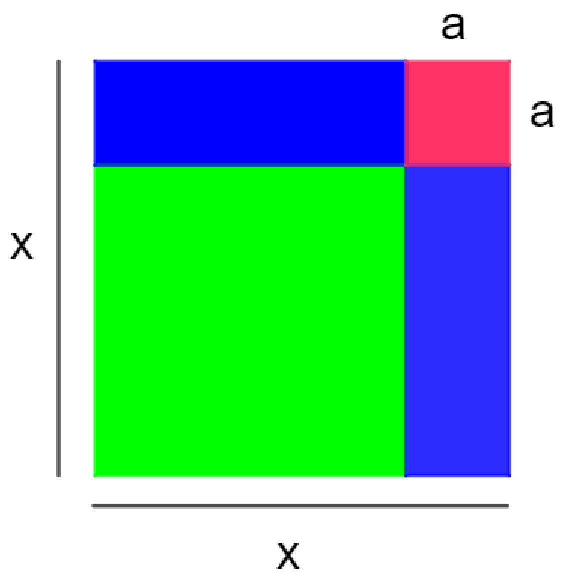


Fonte: Autores (2022).

a) Qual seria a área do retângulo azul e dos quadrados verde e vermelho?
b) E a área do quadrado maior?
c) Como podemos escrever a área do quadrado maior (que contém todos os quatro quadriláteros)?

2- Dado o quadrado abaixo, responda:

Figura 8: Representação produto da soma pela diferença.



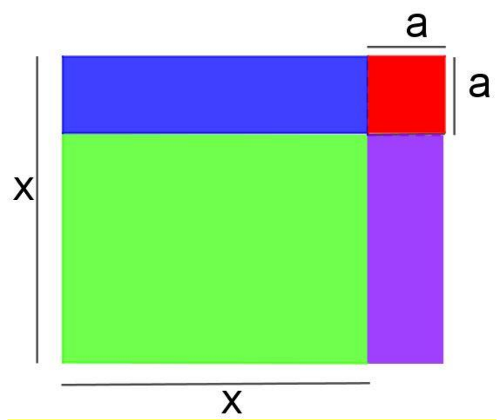
Fonte: Autores (2022).

a) Como seria expresso algebricamente a área do quadrado em verde? Que nome recebe essa expressão?

O questão sobre o produto da soma pela diferença será feito por um estagiário em conjunto com a sala. Em seguida, iremos definir os produtos notáveis, e seguir com a atividade final.

3- Dado o quadrado abaixo, responda:

Figura 9: Representação produto da diferença.



Fonte 1: Autores (2022).

a) Como seria expresso algebricamente as áreas verde e roxa?

b) Somando essas duas expressões de áreas e aplicando a fatoração, que produto obteremos?

Produtos notáveis: São expressões algébricas que aparecem com muita frequência no cálculo algébrico. São utilizados no processo de fatoração de polinômios e no processo de simplificação deles. Os cinco produtos notáveis mais relevantes são: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença.

Existe uma relação entre os produtos notáveis e a fatoração algébrica, através da fatoração, transformamos a expressão algébrica num produto de fatores polinomiais. Para determinadas expressões, a fatoração levaria a um produto notável e do produto notável podemos escrever a expressão algébrica novamente utilizando a propriedade distributiva.

Quadrado da soma: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x+a)(x+a) = (x+a)^2$. O nome *quadrado da soma* é dado porque a representação por potência desse produto é $(x+a)^2$. Sua expressão algébrica seria $(x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$.

Quadrado da diferença: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x-a)(x-a) = (x-a)^2$. Sua única diferença com o *quadrado da soma* é o sinal negativo no termo central. Sua expressão algébrica seria $(x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$.

Produto da soma pela diferença: É o produto notável que envolve um fator binomial com uma soma e outro com uma subtração, $(x+a)(x-a)$. Sua expressão algébrica seria $x^2 - a^2$.

Nesse momento, antes de aplicar as duas atividades sobre polinômios, vamos entregar a segunda lista impressa contendo o resumo dessa segunda parte e os exercícios e questões propostas.

8° Atividade sobre polinômios e fatoração (20 min).

Haverá um tempo de 10 minutos para resolverem. Caso não haja tempo para apresentarmos a resolução desse problema, deixaremos para o início da próxima aula. Um tempo de 10 minutos será necessário para resolução.

1) (**Enem - 2010**) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes são dados pelas funções:

$V1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e $V2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$.Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante t = 0 e, também, no tempo t igual a:

a) 1,3h b) 1,69h c) 10,0h d)13,0h e) 16,9h

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referências:

ENEM 2010 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 17 fev. 2022.

ENEM 2012 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 17 fev. 2022.

GOUVEIA, Rosimar. Fatoração de Polinômios. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/fatoracao/amp/. Acesso em: 12 fev. 2022.

LUIZ, Robson. Fatoração de expressão algébrica. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fatoracao-expressao-algebrica.htm. Acesso em: 12 fev. 2022.

NOVAES, Jean Carlos. Produtos notáveis: Veja as Propriedades. **Matemática básica**. Disponível em: https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/. Acesso em: 12 fev. 2022.

OLIVEIRA, Naysa. Produtos Notáveis. **Brasil escola**. Disponível em: https://m.brasilescola.uol.com.br/amp/matematica/produtos-notaveis.htm. Acesso em: 12 fev. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Polinômios. **Brasil Escola**. Disponível em: https://m.brasilescola.uol.com.br/amp/matematica/polinomios.htm. Acesso em: 12 fev. 2022.

SÁ, Robison. Monômios. **Info escola**. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/monomios/. Acesso em: 12 fev. 2022.

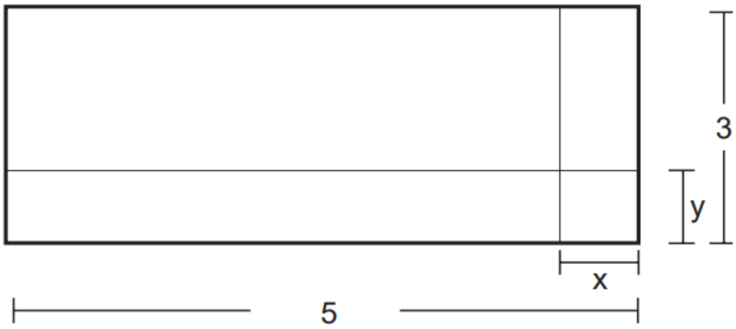
SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é polinômio? **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-polinomio.htm. Acesso em: 12 fev. 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. Valor Numérico de um Polinômio. **Mundo educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/valor-numerico-um-polinomio.htm. Acesso em: 25 fev. 2022.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática** – Realidade e tecnologia. São Paulo: FTD, 2018.

STOCCO, Kátia Cristina. DINIZ, Maria Ignez de Souza. **Matemática** – Ensino Médio. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

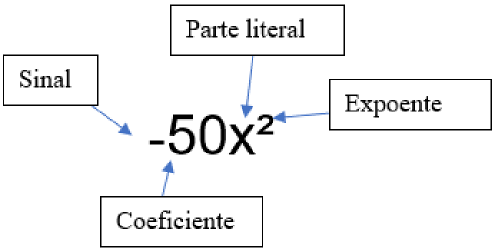
Anexos:



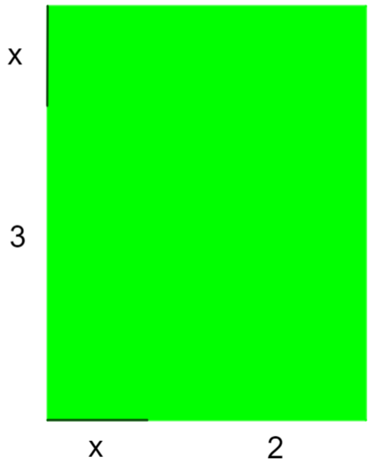
a)

Apêndices:

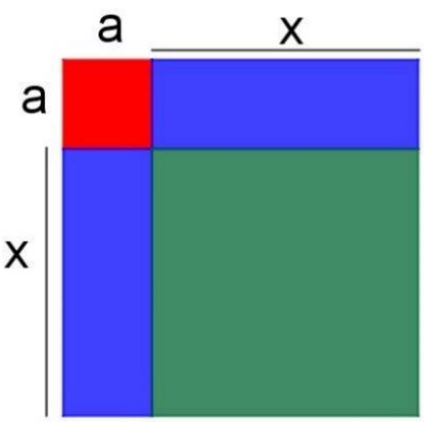
A)



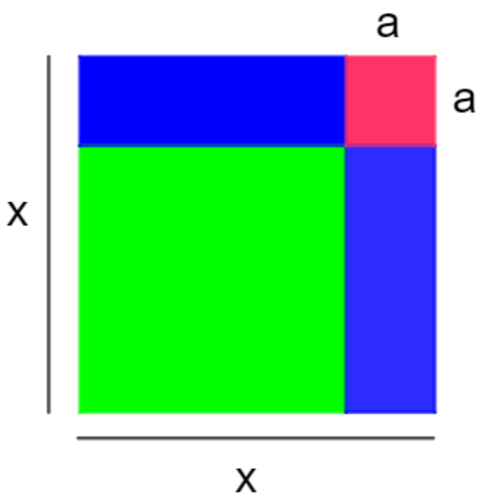
B)



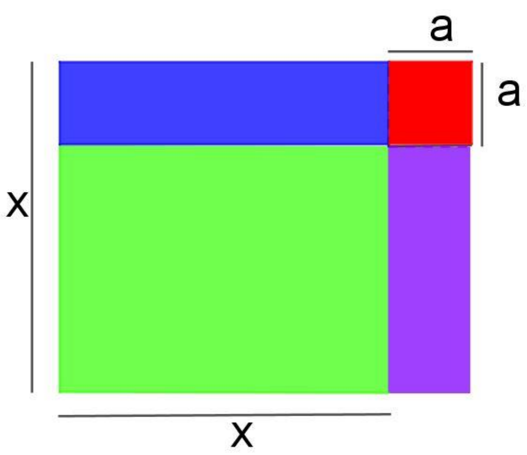
C)



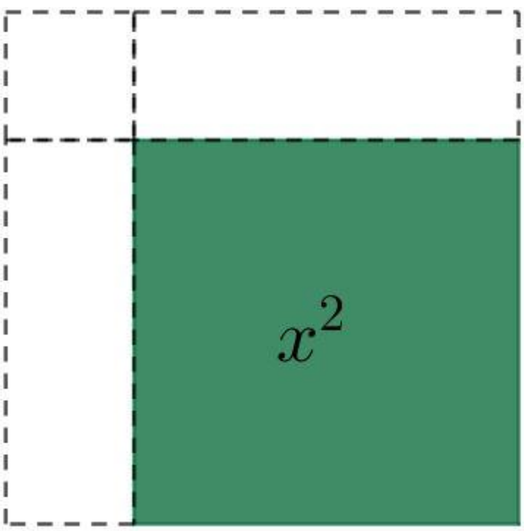
D)



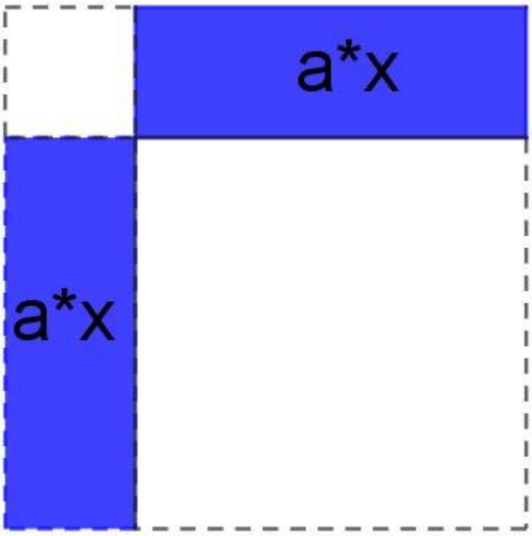
E)



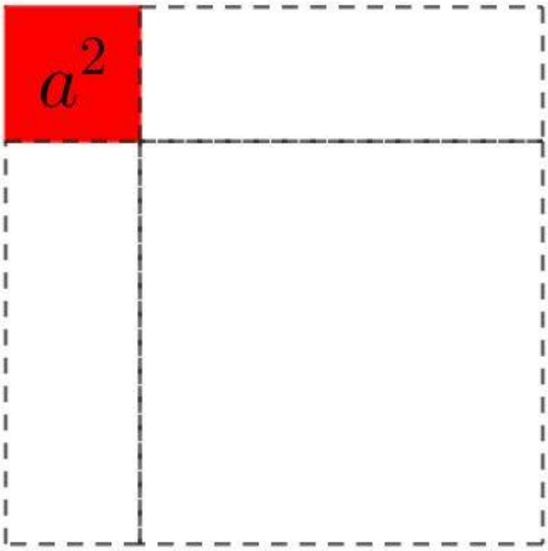
F)



G)



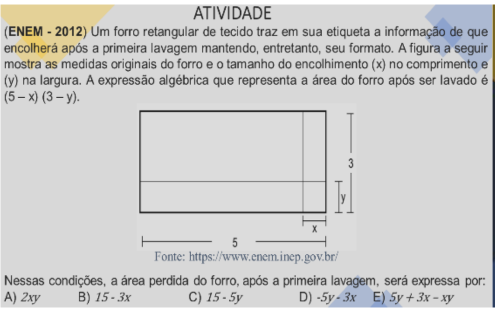
H)



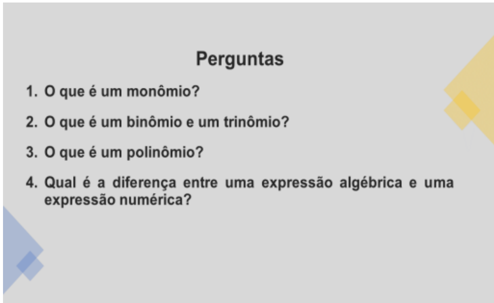
I)

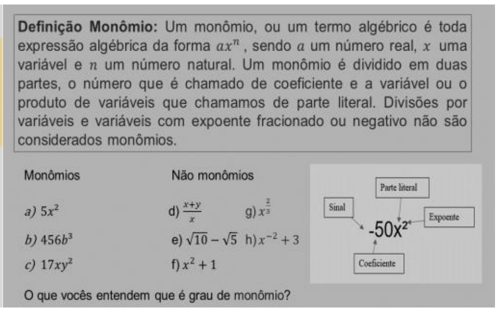

PROMAT – 3 ENCONTRO
Polinômios
Fatoração
Produtos notáveis

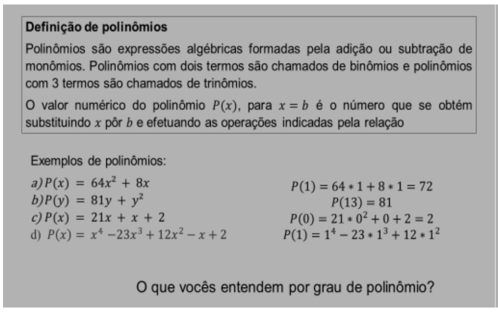

Atividade introdutória 1

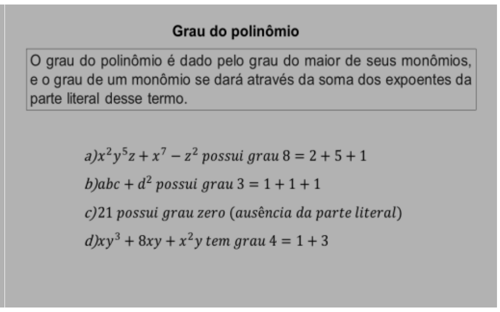

ATIVIDADE
(ENEM - 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).
3
y
x
5
Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/
Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:
A) $2xy$ B) $15 - 3x$ C) $15 - 5y$ D) $-5y - 3x$ E) $5y + 3x - xy$


Como vocês resolveram?

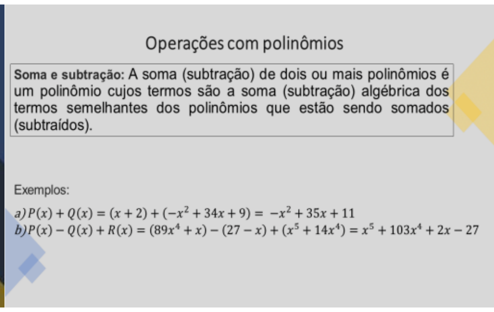

Perguntas
1. O que é um monômio?
2. O que é um binômio e um trinômio?
3. O que é um polinômio?
4. Qual é a diferença entre uma expressão algébrica e uma expressão numérica?


Definição Monômio: Um monômio, ou um termo algébrico é toda expressão algébrica da forma ax^n, sendo a um número real, x uma variável e n um número natural. Um monômio é dividido em duas partes, o número que é chamado de coeficiente e a variável ou o produto de variáveis que chamamos de parte literal. Divisões por variáveis e variáveis com expoente fracionado ou negativo não são considerados monômios.
Monômios
a) $5x^2$
b) $456b^3$
c) $17xy^2$
Não monômios
d) $\frac{x+y}{x}$
g) $x^{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt{10} - \sqrt{5}$
h) $x^{-2} + 3$
f) $x^2 + 1$
Parte literal
Sinal
Expoente
$-50x^2$
Coeficiente
O que vocês entendem que é grau de monômio?


Definição de polinômios
Polinômios são expressões algébricas formadas pela adição ou subtração de monômios. Polinômios com dois termos são chamados de binômios e polinômios com 3 termos são chamados de trinômios.
O valor numérico do polinômio $P(x)$, para $x = b$ é o número que se obtém substituindo x pôr b e efetuando as operações indicadas pela relação
Exemplos de polinômios:
a) $P(x) = 64x^2 + 8x$
b) $P(y) = 81y + y^2$
c) $P(x) = 21x + x + 2$
d) $P(x) = x^4 - 23x^3 + 12x^2 - x + 2$
$P(1) = 64 * 1 + 8 * 1 = 72$
$P(13) = 81$
$P(0) = 21 * 0^2 + 0 + 2 = 2$
$P(1) = 1^4 - 23 * 1^3 + 12 * 1^2$
O que vocês entendem por grau de polinômio?

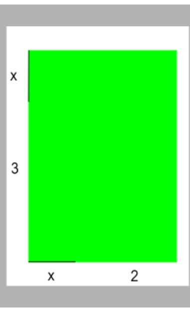

Grau do polinômio
O grau do polinômio é dado pelo grau do maior de seus monômios, e o grau de um monômio se dará através da soma dos expoentes da parte literal desse termo.
a) $x^2y^5z + x^7 - z^2$ possui grau $8 = 2 + 5 + 1$
b) $abc + d^2$ possui grau $3 = 1 + 1 + 1$
c) 21 possui grau zero (ausência da parte literal)
d) $xy^3 + 8xy + x^2y$ tem grau $4 = 1 + 3$


Poderiam dar exemplos de polinômios ?
Vamos Operar!


Operações com polinômios
Soma e subtração: A soma (subtração) de dois ou mais polinômios é um polinômio cujos termos são a soma (subtração) algébrica dos termos semelhantes dos polinômios que estão sendo somados (subtraídos).
Exemplos:
a) $P(x) + Q(x) = (x + 2) + (-x^2 + 34x + 9) = -x^2 + 35x + 11$
b) $P(x) - Q(x) + R(x) = (89x^4 + x) - (27 - x) + (x^5 + 14x^4) = x^5 + 103x^4 + 2x - 27$

Multiplicação de polinômios: Ela é totalmente fundamentada na propriedade distributiva. Sendo necessário multiplicar cada monômio do primeiro polinômio por todos os monômios do segundo, observado os sinais dos resultados.

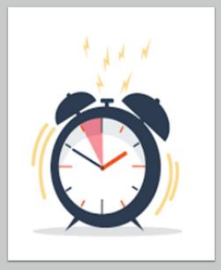
Exercício:
Sabendo que a área do retângulo abaixo é de $12\ cm^2$, calcule o valor da do comprimento x.



Exercício 1:

INTERVALO (20 min)

- 9h40min às 10h



Divisão de polinômios

A divisão de polinômios é feita usando o método comum da chave, exatamente como é feito com números inteiros. Essa operação é útil para descobrir a forma fatorada do polinômio. Devemos dividir um polinômio por um polinômio de grau menor.

1) Qual é o cociente da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ pelo polinômio $D(x) = x + 1$.

$$\begin{array}{l|l} P(X) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad P(X)=D(x)*Q(x)+R(x)$$

Resolução:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x+1 \\ \cline{3-3}
- & x^3 + x^2 + 0 + 0 & x^2+6x+9 \\ \cline{2-2}
 & 0 + 6x^2 + 15x + 9 & \\
- & 6x^2 + 6x + 0 & \\ \cline{2-2}
 & 0 + 9x + 9 & \\
- & 0 + 9x + 9 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Poderiam nos dar um exemplo de um polinômio de grau dois e outro de grau um?

Agora tentem fazer a divisão entre esses dois polinômios.

Fatoração de polinômios

É o processo utilizado na matemática para expressar um número ou uma expressão algébrica como produto de fatores. Os principais métodos de fatoração algébrica são: fatoração por evidência e fatoração por agrupamento.

Vocês conseguem dar dois exemplos de binômios para escrevermos no quadro?

Fatoração por evidência

Quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio, seja ele apenas um número ou uma letra ou ambos, será colocado fora dos parênteses e dentro estará o resultado da divisão da expressão pelo fator comum.

Exemplos

$a)\ 12x^2 + 3x^4$ tem $3x^2$ como fator comum, a forma fatorada seria $3x^2(4 + x^2)$.

$b)\ 7 - 49x^3$ tem 7 como fator comum, a forma fatorada seria $7(1 - 7x^3)$

Fatoração por agrupamento

Quando o polinômio possuí fator que não está presente em todos os termos, devemos identificar os termos que podem ser agrupados por fatores comuns. Nesse tipo de fatoração, colocamos os fatores comuns dos agrupamentos em evidência.

Exercício

1) Fatore por agrupamento as seguintes expressões algébricas:

$a)\ ab + 3b + 7a + 21$

b) $2xb - 12x + 3by - 18y$

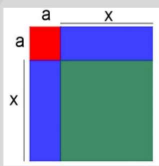
1° Questão

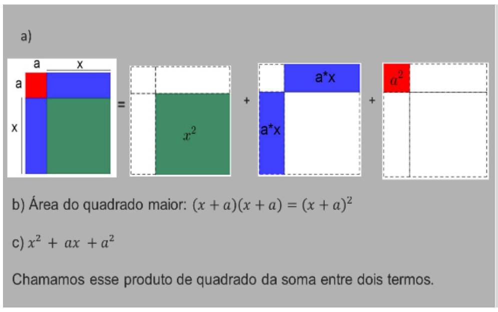
Dado o quadrado abaixo, responda:

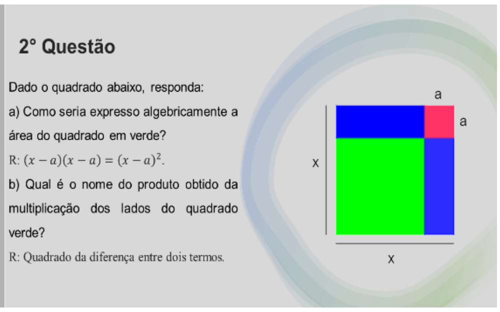
a) Qual seria a área do retângulo azul e dos quadrados verde e vermelho?

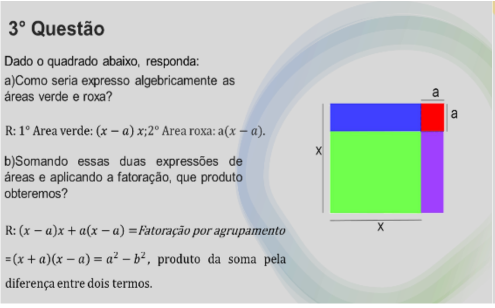
b) E a área do quadrado maior?

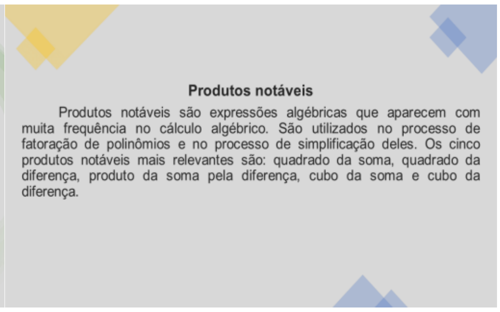
c) Como podemos escrever a área do quadrado maior (que contém todos os quatro quadriláteros)?

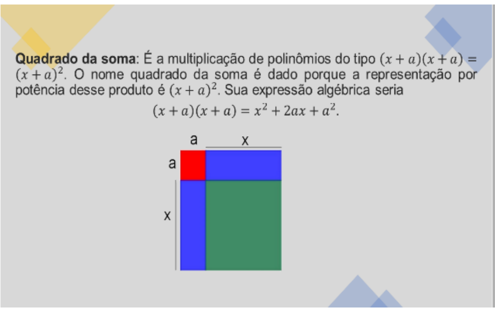


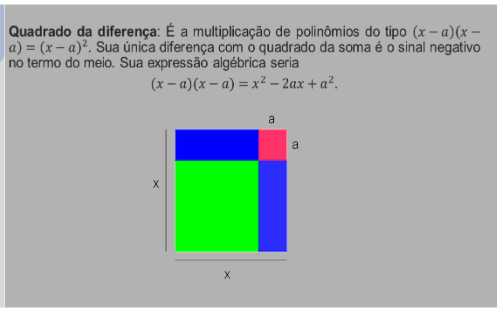

a)
a
x
a
x
=
x^2
+
a*x
a*x
+
a^2
b) Área do quadrado maior: $(x+a)(x+a) = (x+a)^2$
c) $x^2 + ax + a^2$
Chamamos esse produto de quadrado da soma entre dois termos.

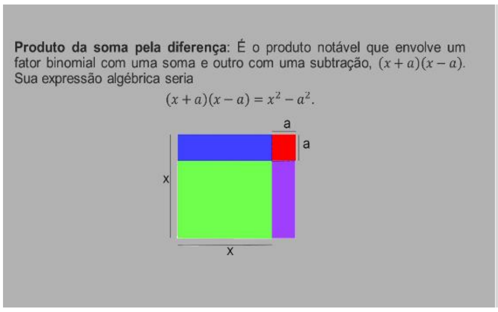

2° Questão
Dado o quadrado abaixo, responda:
a) Como seria expresso algebricamente a área do quadrado em verde?
R: $(x-a)(x-a) = (x-a)^2$.
b) Qual é o nome do produto obtido da multiplicação dos lados do quadrado verde?
R: Quadrado da diferença entre dois termos.
a
a
x
x


3° Questão
Dado o quadrado abaixo, responda:
a)Como seria expresso algebricamente as áreas verde e roxa?
R: 1° Area verde: $(x-a)\,x$;2° Area roxa: $a(x-a)$.
b)Somando essas duas expressões de áreas e aplicando a fatoração, que produto obteremos?
R: $(x-a)x + a(x-a) = \textit{Fatoração por agrupamento}$
$=(x+a)(x-a) = a^2 - b^2$, produto da soma pela diferença entre dois termos.
a
a
x
x


Produtos notáveis
Produtos notáveis são expressões algébricas que aparecem com muita frequência no cálculo algébrico. São utilizados no processo de fatoração de polinômios e no processo de simplificação deles. Os cinco produtos notáveis mais relevantes são: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença.


Quadrado da soma: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x+a)(x+a) = (x+a)^2$. O nome quadrado da soma é dado porque a representação por potência desse produto é $(x+a)^2$. Sua expressão algébrica seria
$(x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$.
a
x
a
x


Quadrado da diferença: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x-a)(x-a) = (x-a)^2$. Sua única diferença com o quadrado da soma é o sinal negativo no termo do meio. Sua expressão algébrica seria
$(x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$.
a
a
x
x


Produto da soma pela diferença: É o produto notável que envolve um fator binomial com uma soma e outro com uma subtração, $(x+a)(x-a)$. Sua expressão algébrica seria
$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$.
a
a
x
x

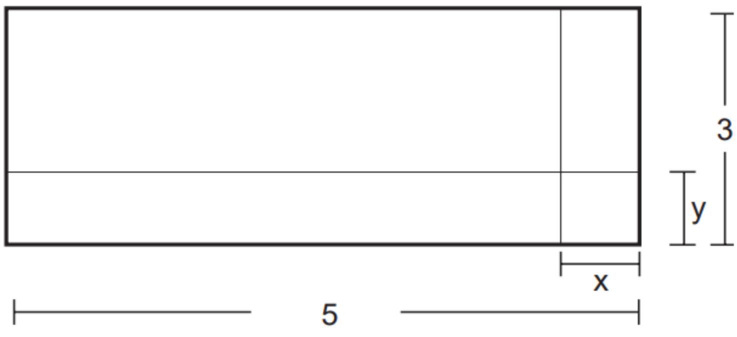

Agora vocês podem praticar....
Atividade no final da segunda lista.


FIM DO 3 ENCONTRO
No próximo encontro vamos ter:
Sistemas de equações lineares.
Equações de primeiro grau.

7.1. **Resoluções das atividades;**

1) (**Enem - 2012**) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).

Figura 10: Ilustração do problema.



Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

A) $2xy$ B) $15 - 3x$ C) $15 - 5y$ D) $-5y - 3x$ E) $5y + 3x - xy$

Sendo 15 a área então devemos retirar desta a área que fica após a lavagem, para obter a área perdida, ficando desta forma:

$$15 - (5 - x)(3 - y) =$$

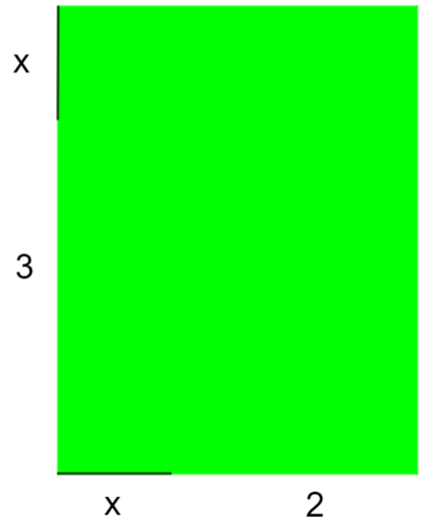
$$15 - (15 - 5y - 3x + xy) =$$

$$15 - 15 + 5y + 3x - xy =$$

$$5y + 3x - xy$$

Logo $5y + 3x - xy$ é a solução

1) Sabendo que a área do retângulo abaixo é de $12\ cm^2$, calcule o valor do comprimento x.



$$A = (x + 3)(x + 2) = 12$$
$$x^2 + 3x + 2x + 6 = 12$$
$$x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 * 1 * -6}}{2 * 1}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x^1 = \frac{-5 + 7}{2} = 1$$
$$x^2 = \frac{-5 - 7}{2} = -6$$

Como x não pode ser negativo, então x = 1 cm.

2) (**Enem - 2010**) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo

t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes são dados pelas funções:

$V1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e $V2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante t = 0 e, também, no tempo t igual a:

a) 1,3h b) 1,69h c) 10,0h d)13,0h e) 16,9h f)

Aqui devemos ver quando uma função será igual a outra assim:

$$250t^3 - 100t + 3000 = 150t^3 + 69t + 3000$$

$$250t^3 - 100t = 150t^3 + 69t$$

$$100t^3 = + 69t + 100t$$

$$100t^3 - 169t = 0$$

$$t(100t^2 - 169) = 0$$

como em t=0 já sabemos que serão iguais logo temos que ter:

$$100t^2 - 169 = 0$$

$$100t^2 = 169$$

$$t^2 = \frac{169}{100}$$

$$t = \pm\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}}$$

$$t = \pm\frac{13}{10}$$

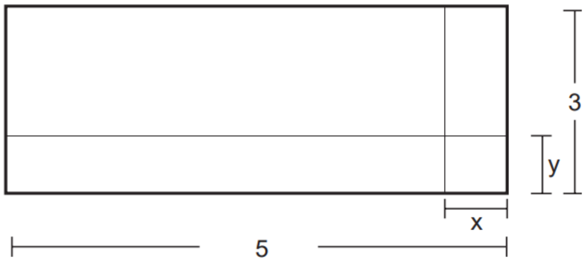
Sendo valido apenas o resultado positivo, $t = \frac{13}{10} = 1{,}3h$

Alternativa A

7.2. Material entregue aos alunos;

Atividade introdutória sobre polinômios

1) (**Enem - 2012**) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).



Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

A) $2xy$ B) $15 - 3x$ C) $15 - 5y$ D) $-5y - 3x$ E) $5y + 3x - xy$

Definição Monômio: Um monômio, ou um termo algébrico é toda expressão algébrica da forma ax^n , sendo a um número real, x uma variável e n um número natural. Um monômio é dividido em duas partes, o número que é chamado de coeficiente numérico e a variável ou o produto de variáveis chamados parte literal. Divisões por variáveis e, variáveis com expoente fracionário ou negativo, não são considerados monômios.

Exemplos de monômios: $5x^2$,$456b^3$,$17xy^2$ Não monômios: $\frac{x+y}{x}$, $\sqrt{10}-\sqrt{5}$, x^2+1, $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{-2}+3$

Definição de polinômios: Uma função polinomial ou simplesmente polinômio, tem como forma geral $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Cada termo é um monômio separado por uma operação de soma ou subtração. Polinômios com apenas dois termos são chamados de binômios e polinômios com três termos são chamados de trinômios.

O valor numérico do polinômio $P(x)$, para $x = b$ é o número que se obtém substituindo x por b e efetuando as operações indicadas pela relação.

Exemplos de polinômios:

a)$P(x) = 64x^2 + 8x$ $P(1) = 64 * 1 + 8 * 1 = 72$ b) $P(y) = 81$ $P(13) = 81$ c)$P(x) = 21x^2 + x + 2$ $P(0) = 21 * 0^2 + 0 + 2 = 2$ d) $P(x) = x^4 - 23x^3 + 12x^2 - x + 2$

$P(1) = 1^4 - 23 * 1^3 + 12 * 1^2$

Grau do polinômio: O grau do polinômio é dado pelo grau do maior de seus monômios, e o grau de um monômio se dará através da soma entre os expoentes da parte literal desse termo.

Exemplos:

$A(x, y, z) = x^2y^5z + x^7 - z^2 \; possui \; grau \; 8 = 2 + 5 + 1$

$B(a, b, c) = abc + d^2 \; possui \; grau \; 3 = 1 + 1 + 1$

$C(x) = 21 \; possui \; grau \; zero \; (ausência \; da \; parte \; literal)$

$D(x, y) = xy^3 + 8xy + x^2y \; tem \; grau \; 4 = 1 + 3$

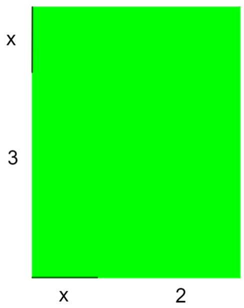
Operações com polinômios

Soma e subtração: A soma (subtração) de dois ou mais polinômios é um polinômio cujos termos são a soma (subtração) algébrica dos termos semelhantes dos polinômios que estão sendo somados (subtraídos).

Multiplicação: Ela é totalmente fundamentada na propriedade distributiva, também conhecida como chuveirinho. Sendo necessário multiplicar cada monômio do primeiro polinômio por todos os monômios do segundo, observado os sinais dos resultados.

Exercício 1:

Sabendo que a área do retângulo abaixo é de $12 \; cm^2$, calcule o valor do comprimento x.



Divisão de polinômios: A divisão de polinômios é feita usando o método comum da chave, exatamente como é feito com números inteiros. Essa operação é útil para descobrir a forma fatorada do polinômio. Devemos dividir um polinômio por um de grau menor.

Exemplo:

Qual é o quociente da divisão polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ pelo polinômio $D(x) = x + 1$.

Logo, o polinômio $P(x)$ pode ser escrito na forma de multiplicação entre o polinômio divisor $D(x) = x + 1$ e o polinômio quociente $Q(x) = x^2 + 6x + 9$, mais o resto $R(x)$ que nesse caso é zero,
$P(X) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = D(x) * Q(x) + R(x) = (x + 1)(x^2 + 6x + 9) + 0.$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3+7x^2+15x+9 & x+1 \\ \cline{3-3}
- & x^3+x^2+0+0 & x^2+6x+9 \\ \cline{2-2}
 & 0+6x^2+15x+9 & \\
- & 6x^2+6x+0 & \\ \cline{2-2}
 & 0+9x+9 & \\
- & 9x+9 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Fatoração de polinômios: É o processo utilizado na matemática para expressar um número ou uma expressão algébrica como produto de fatores. Os principais métodos de fatoração algébrica são: fatoração por evidência e fatoração por agrupamento.

Fatoração por evidência: Quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio, seja ele apenas um número ou uma letra ou ambos, será colocado fora dos parênteses e dentro estará o resultado da divisão da expressão pelo fator comum.

Exemplos:

c) $12x^2 + 3x^4$ tem $3x^2$ como fator comum, então, uma forma fatorada seria $3x^2(4 + x^2)$.

d) $7 - 49x^3$ tem 7 como fator comum, então, uma forma fatorada seria $7(1 - 7x^3)$

Fatoração por agrupamento: Quando o polinômio possuí fator que não está presente em todos os termos, devemos identificar os termos que podem ser agrupados por fatores comuns. Nesse tipo de fatoração, colocamos os fatores comuns dos agrupamentos em evidência.

Exemplos:

d) $x^2 + 3x + x^2y + 3xy = x^2(1 + y) + 3x(1 + y) = (1 + y)(x^2 + 3x)$

e) $ab + 3b + 7a + 21 = b(a + 3) + 7(a + 3) = (a + 3)(b + 7)$

f) $2xb - 12x + 3by - 18y = 2x(b - 6) + 3y(b - 6) = (b - 6)(2x + 3y)$

Produtos notáveis: São expressões algébricas que aparecem com muita frequência no cálculo algébrico. São utilizados no processo de fatoração de polinômios e no processo de simplificação deles. Os cinco produtos notáveis mais relevantes são: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença.

Quadrado da soma: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x + a)(x + a) = (x + a)^2$. O nome quadrado da soma é dado porque a representação por potência desse produto é $(x + a)^2$. Sua expressão algébrica seria $(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$.

Quadrado da diferença: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x - a)(x - a) = (x - a)^2$. Sua única diferença com o quadrado da soma é o sinal negativo no termo do meio. Sua expressão algébrica seria $(x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$.

Produto da soma pela diferença: É o produto notável que envolve um fator binomial com uma soma e outro com uma subtração, $(x + a)(x - a)$. Sua expressão algébrica seria $x^2 - a^2$.

Atividade sore polinômios e fatoração

1) (**Enem - 2010**) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes são dados pelas funções:

$V1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e $V2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante t = 0 e, também, no tempo t igual a:

a) 1,3h b) 1,69h c) 10,0h d)13,0h e) 16,9h

7.3. Relatório;

Encontro 3 19/03/2022

Relatório 3 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R.Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia 19 de março de 2022, sábado, no período da manhã, foi realizado o terceiro encontro do Promat. Tivemos a participação de 19 alunos, com 15 já tendo participado em pelo menos um encontro e, outros quatro que vieram ao Promat pela primeira vez se sentiram um pouco deslocados no começo, mas foram se acostumando ao longo da aula. As carteiras foram organizadas em grupos de cinco, mas houve alunos que quiseram trabalhar individualmente.

Os conteúdo dessa aula foram polinômios, fatoração polinomial e produtos notáveis. Nossos principais objetivos para essa aula eram que os alunos compreendessem os conceitos de monômio, polinômio, graus, suas operações e aplicações em problemas matemáticos. Além de fatorar polinômios por evidência, pelo fator comum e por agrupamento. Por fim, também esperávamos que compreendessem o conceito, a visualização geométrica, a fatoração e a aplicação de produtos notáveis.

A aula começou às 8 horas e 5 minutos, porque notamos que ainda estavam chegando alunos e resolvemos esperá-los. Conforme chegavam, decidimos já entregar a primeira folha de resumo que havia sido planejada para ser entregue pouco antes do intervalo, essa mudança ocorreu porque pensamos que eles entenderiam melhor os conteúdos ao longo das explicações e, também, por acharmos que talvez não conseguiriam enxergar bem os textos, atividades e exemplos nas lâminas, por conta da claridade.

No primeiro momento, pedimos que resolvessem um problema do ENEM de 2012 que relacionava o estudo da área do retângulo com as operações de soma e multiplicação de polinômios. Essa atividade tinha como objetivo, avaliar seus conhecimentos prévios e suas habilidades de manipulação de polinômios. Tínhamos estipulado um tempo de 10 minutos para eles resolverem, mas levou em torno de 15 minutos, pois alguns alunos ficaram com dúvidas sobre como encontrar a expressão que representava a área pedida, ou como se realizava a propriedade da distributiva.

Na resolução, foram discutidos três caminhos distintos, dois deles foram apresentados por nós, enquanto o outro foi sugerido por uma aluna. Desse método apresentado por ela, notamos que sua compreensão sobre o problema foi profunda, percebendo que poderia calcular as áreas naquelas regiões e depois apenas retirar uma área que estaria sendo somada duas vezes.

Em seguida, fizemos quatro perguntas referentes ao tema de polinômios para introduzi-los ao assunto. Eles não conseguiram pensar numa definição completa sobre monômio, mas pelo significado da palavra, sabiam que se referia a algo único. Usando exemplos da atividade anterior, conseguimos definir com eles monômios, binômios, trinômios e polinômios. Além destes, foi perguntado qual a diferença entre uma expressão algébrica e uma expressão numérica, que foi respondida corretamente por uma aluna. No próximo momento, comentamos a definição de monômio e discutido sobre o que seria o seu grau. Um dos alunos que frequenta o primeiro ano do Curso de Matemática, afirmou que o grau se referia ao maior expoente do termo algébrico e, quando foi apresentado um monômio com mais de uma variável, discutiram sobre qual seria seu grau. Quando explicamos que o grau do monômio é dado pela soma dos expoentes da parte literal, os alunos não tiveram mais dúvidas sobre graus de polinômios durante a aula, mostrando que compreenderam o conteúdo.

Depois apresentamos a definição de polinômio e do seu valor num determinado ponto, o valor numérico. Perguntamos o que eles achavam que seria o grau do polinômio, e o mesmo aluno do ensino superior disse que seria o grau do maior monômio presente naquele polinômio. Os outros concordaram com ele, mostrando que também houve um entendimento mútuo sobre esse conceito. Seguindo para as operações de soma e subtração com polinômios, uma aluna que ainda não havia se manifestado, afirmou que deveríamos somar os termos semelhantes como sua professora uma vez lhe havia dito. Confirmamos sua fala, explicamos que os termos semelhantes são aqueles que possuem a mesma parte literal e o mesmo expoente.

Após explicarmos sobre a definição de multiplicação de polinômios, seguimos com um exercício para praticarem. Esse exercício consistia em encontrar o valor de x, presente no comprimento e largura do retângulo, conhecendo o valor de sua área.

Eles tiveram mais facilidade em realizar a distributiva, mas alguns esqueceram a fórmula resolutiva da equação do segundo grau ou como utilizá-la. Após os ajudarmos a relembrarem, percebemos que alguns já haviam conseguido chegar a resposta, então decidimos começar a resolução. A conselho da professora orientadora, resolvemos usando o método da soma e produto, como alternativa para aqueles que tinham dificuldade em usar a fórmula resolutiva da equação quadrática.

Depois da resolução ocorreu o intervalo e retornamos com a aula às 10h10 minutos. Nesse meio tempo, entregamos a segunda folha de resumo e reiniciamos com a explicação da operação de divisão de polinômios usando dois exemplos. O primeiro foi apresentado por nós, o que levou à divisão exata e o segundo foi feito a partir de dois polinômios sugeridos por eles, o que levou à uma divisão não-exata, por conta do tempo, nós resolvemos os dois exemplos.

Em seguida, trabalhamos com eles a fatoração polinomial fazendo a evidência e o agrupamento de fatores. Pedimos que dessem dois exemplos de polinômios quaisquer para encontrar os fatores comuns presentes em cada termo, com objetivo de introduzir a fatoração por evidência. Uma aluna se mostrou participativa e sugeriu os dois polinômios. Após explicar o processo de fatoração por evidência usando os exemplos e, explicar a fatoração por agrupamento usando um exemplo presente na segunda folha, demos um tempo de 10 minutos para que eles resolvessem o segundo exemplo de fatoração por agrupamento. A maioria seguiu o processo que explicamos e chegaram à resposta correta, processo de fatoração por agrupamento, outros apresentaram erros no durante o processo.

Após o tempo programado, realizamos a correção do exemplo no quadro e começamos a estudar os produtos notáveis. Por conta do tempo, decidimos realizar as duas questões desenvolvidas para eles encontrarem da área dos quadrados, o quadrado da soma e o quadrado da diferença, junto ainda da questão para o produto da soma pela diferença. Era encontrado primeiro a área da região do quadrado maior perguntada e depois encontrada a mesma área fazendo a diferença entre a área do quadrado maior e as áreas das outras regiões.

Faltando 15 minutos para às 11h40 min., pedimos que resolvessem a atividade final sobre polinômios no final da segunda folha de resumo. Essa atividade consiste em encontrar o momento do tempo (em horas) de quando o volume de dois reservatórios fosse igual. para isso seria necessário igualar as funções apresentadas. Essa atividade foi escolhida porque ela trabalha com a ideia de polinômios e, em certo momento, é necessário realizar a fatoração da expressão algébrica de grau três para encontrar as raízes.

A resolução da atividade será enviada para os alunos pelo grupo do *Whatsapp* para agilizar o tempo da próxima aula. Dúvidas poderão ser respondidas tanto no grupo quanto na próxima aula. Analisamos que ao longo da aula conseguimos cumprir nossos objetivos propostos. Por meio da participação dos alunos dando exemplos, sugestões e, resolvendo os exercícios e problemas, avaliamos que os alunos apresentaram um crescimento em relação aos conhecimentos prévios e dificuldades mostradas no começo da aula na atividade introdutória.

Nesse encontro, tivemos a ausência de um companheiro do grupo, mas conseguimos administrar a aula. Notamos que precisamos alterar mais nossas aulas, alternando atividades e definições, e utilizar as lâminas do *Powerpoint* e os espaços do quadro de maneira mais organizada. Essas modificações podem dinamizar mais as aulas.

8. **Encontro 4: Plano de aula;**

4º Encontro - 26 de março de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

***Conteúdos*:** Equação do 1° grau, sistema de equações lineares e ideia de função do 1° grau.

***Objetivo geral**:* Revisar o significado de equação, resolver equações algébricas do 1°grau, sistemas equações lineares e introduzir o estudo de funções.

***Objetivos específicos*:** Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Identificar uma equação do 1° grau;
- Resolver equações do 1° grau, para os mais diversos problemas;
- Trabalhar com sistemas de equações do 1° grau usando os métodos da adição e substituição;
- Classificar os sistemas de equações lineares;

- Compreender a noção de funções, assunto do próximo encontro;

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: Notebook, Projetor, Power *Point* e lista de exercícios.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Nessa aula, não será permitido o uso de calculadora, devido o Promat ter foco no ENEM e outros vestibulares que também têm seu uso restrito. Utilizaremos o projetor no decorrer da aula para deixá-la mais dinâmica, apresentando os conteúdos em lâminas previamente preparadas. A resolução de tarefas ou anotações de exemplos será feita no quadro.

Essa aula será realizada com o auxílio de um projetor, no qual serão projetadas lâminas com as definições presentes no texto abaixo, além das observações e a explicação dos métodos de resolução.

No início da aula, os alunos serão separados em grupos de cinco participantes para melhor atendimento às dúvidas. Disponibilizaremos nesse início uma folha impressa para cada aluno, com sua frente e seu verso contendo o resumo do conteúdo estudado.

1° Breve discussão com os alunos sobre o que eles entendem por equação e apresentar exemplos de seu uso diário. (15 min)

Será perguntado aos alunos da sala o que eles entendem por equação e se poderiam citar um exemplo de seu uso no cotidiano.

EXEMPLOS DE USOS DIÁRIOS

a) O modelo de cobrança do consumo de água que tem custo fixo para uma certa quantidade usada, adicionando um valor extra para cada metro cúbico de água a mais utilizada (em algumas regiões temos um acréscimo de um percentual destinado a esgoto);
b) O salário de um vendedor que recebe um valor fixo e ganha uma comissão percentual por suas vendas;
c) O lucro de uma empresa que varia de acordo com suas vendas;
d) Para calcular a área ou volume de objetos é necessário a criação da expressão;

Em seguida, exploraremos a definição formal de equação e suas raízes, além de exemplos de sua aplicação diária.

Definição Equação: Palavra vinda do latim e grego “Equa” que significa igualdade. Definimos equação como uma sentença matemática, composta por um sinal de igualdade e duas expressões algébricas, uma em cada lado da igualdade. Cada expressão pode ser formada por números e letras; essas letras são chamadas de incógnitas, porque representam valores desconhecidos. O objetivo sempre é isolar as incógnitas e obter os valores que tornam a igualdade verdadeira, ou seja, determinar a solução S ou a raiz da equação.

Após ver a definição de equação, perguntaremos o que entendem por raízes de equações, para partir dessas ideias explorando-as.

Definição Raízes de uma equação: Definimos como raiz de uma equação o valor que suas incógnitas assumem de modo que essa equação seja válida perante a igualdade. O número de raízes de uma equação é dado pelo grau que ela possui.
Exemplos

a) 2x=10	5 é a raiz da equação, porque 2*(5) = 10 é verdade.
b) x+1=10	9 é a raiz da equação, por que 9+1=10 é verdade.
c) x+3=7	5 não é a raiz da equação, por que 5+3=7 é falso.

2° Atividade de apresentação da questão aplicada no vestibular da UFG no ano de 2010. (20 min)

Essa atividade estará na folha impressa distribuída aos alunos. Tem o propósito de estimular o aprendizado dos seguintes conteúdos de equações algébricas e para verem a forma como são propostos esses tipos de problemas em vestibulares. Um tempo de 10 minutos está previsto para eles resolverem.

Antes da correção, se convidará algum aluno para apresentar sua resolução oralmente, também será perguntado se alguém teria feito de maneira diferente. Outro tempo de 10 minutos será necessário para explorar a resolução.

Atividade Introdutória 1

(UFG – 2010 – 2° Fase) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a $\frac{2}{3}$ do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

3° Definir o conceito geral de equações do 1° grau e sistemas de equações. (65 min.).

A partir da atividade introdutória, vamos agora apresentar a definição de equação do 1° grau, comentando sobre sua forma, seus coeficientes e incógnitas e termo independente. Vamos perguntar do porquê essas equações serem de 1°grau para relembrar o conteúdo da aula passada e mostrar exemplos de equações que são e não são do 1° grau.

Equação do 1° grau: Uma equação do 1°grau (linear), é um tipo de equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, sendo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ coeficientes reais, as incógnitas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ e c o termo independente. Além disso, o polinômio que forma as expressões tem grau um.

Exemplos de equações do 1° grau.		
a) $4x - 7y = 9$	c) $\frac{x}{3} + y = 2$	
b) $2x - 1 = 2$	d) $x + y - 2z = 3$	
Exemplos de equações que não são do 1° grau.		
a) $x^2 - 2x + 2 = 0$	c)$x^3 + 2x^2 - x = 0$	e)$x^2 + y^2 = 2$
b) $sen\,x\ + 1 = 0$	d)$x + y = z^2$	

Em seguida, vamos para a segunda atividade introdutória que foi escolhida para sabermos se os alunos conseguem identificar um problema com sistemas de equações lineares e quais os métodos que utilizam para resolver esses tipos de tarefas. O tempo dessa atividade é de 15 minutos. Serão convidados dois alunos para exporem oralmente suas resoluções, com o propósito de explorar os métodos que utilizaram. Outro tempo de 10 minutos para sua resolução e discussão.

Atividade introdutória 2

Claudio usou apenas notas de R\$ 20,00 e de R\$ 5,00 para fazer um pagamento no valor de R\$140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que, no total, foram usadas 10 notas?

Resolução:

x = número de notas de R\$20,00 y = número de notas de R\$5,00

Equação do número de notas usadas: $x + y = 10$

Equação da quantidade e valor das notas: $20x + 5y = 140$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

1- Passo: Aplicando o método da substituição. Na 1° equação, vamos escolher isolar o x (lembrando que podemos também escolher isolar o y) isolamos o x

$x = 10 - y$

2- Passo: Substituindo na 2° equação.

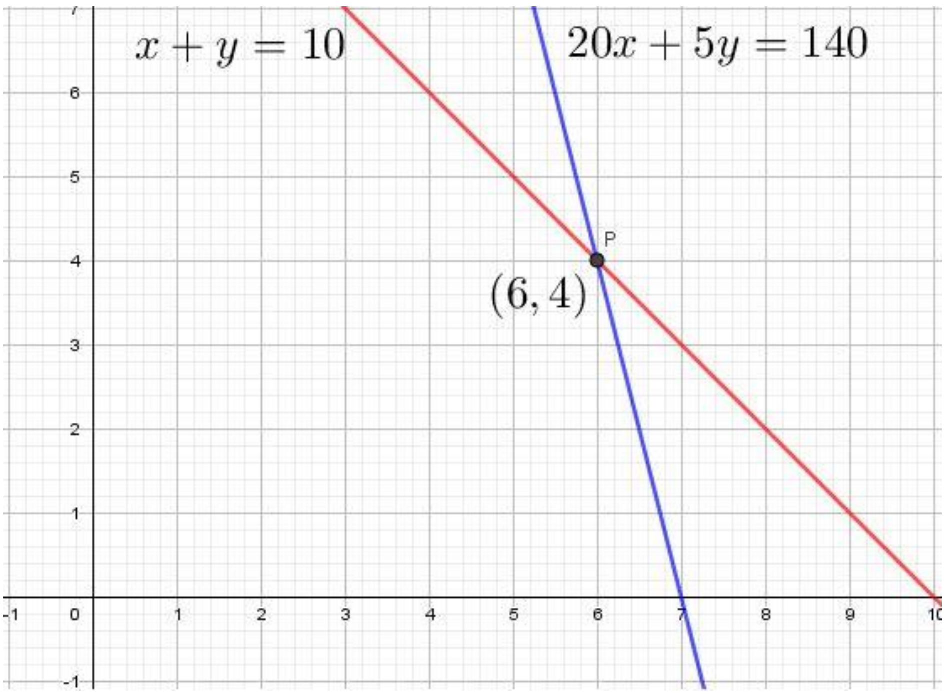
$20(10 - y) + 5y = 140$ com $200 - 20y + 5y = 140$ que é igual a $-15y = -60$. Logo, $y = 4$.

3- Passo: Substituímos o valor encontrado de y na equação do passo 1.

$x = 10 - 4 = 6$. Logo, a solução é 6 notas de R$ 20,00 e 4 notas de R$5,00. S:{(6,4)}

Representação gráfica

Figura 11: Gráfico retas solução atividade



Fonte 2: Autores 2022

A partir dos dois métodos que eles apresentaram oralmente, vamos comentar ainda mais outros dois métodos para resolver essa mesma atividade, sendo um deles o método da tabela. Os alunos serão convidados a apresentar algum método diferente desses quatro caso conheçam.

Em seguida, vamos usar o *Geogebra* para explicar que no caso desse sistema, o ponto comum dessas duas retas concorrentes é a solução do sistema. Somente depois dessa explicação é que falaremos da definição de retas concorrentes e do sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, como está abaixo. Retomando que em um sistema de equações de duas equações e duas incógnitas, a solução se encontra na interseção das duas retas.

Retas concorrentes

Dadas as retas $reta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $reta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, quando se interceptam em um único ponto, dizemos que são **concorrentes**, isto é, as duas retas possuem um único ponto (x, y) em comum.

Sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por duas equações do 1° grau do tipo $ax + by = c$, com duas incógnitas, x e y. As retas dessas equações quando são concorrentes, apresentam um único par de coordenadas (x, y) que satisfaz ambas as equações, ou seja, é um ponto que pertence as duas retas, representadas pelas duas equações.

Dizemos que a solução do sistema formado por duas equações do 1° grau é o conjunto $S: \{(x, y)\}$.

Método da substituição: Esse método consiste em isolar uma incógnita de alguma das equações e substitui-la nas outras equações.

Método da adição: O segundo método consiste em realizar multiplicação (divisão) de todos os termos de uma das equações (ou em mais de uma), de tal modo que, ao somar os termos da equação 1 numa equação 2, uma de suas incógnitas fique com o coeficiente zero.

Método da comparação: O terceiro método consiste em isolar uma mesma incógnita em duas equações e igualar esses dois valores.

5° Intervalo. (20 min)

6° Resolução dos exercícios e atividade sobre sistemas de equações com três equações e três incógnitas. (50 min)

Após o intervalo, vamos pedir que façam essa atividade da IFPE sobre sistemas de três equações e três incógnitas. Esse problema foi modificado para que os alunos encontrem valores inteiros na solução. Eles vão poder resolver da maneira que acharem melhor, enquanto nós vamos estar caminhando na sala para tirar dúvidas.

Atividade introdutória 3

(IFPE – 2012 adaptado) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, lápis e caderno. As três ofertas eram:

1) 5 estojo, 4 lápis e 1 caderno por $R\$54{,}00$.
2) 1 estojo, 2 lápis e 1 caderno por $R\$26{,}00$.
3) 2 estojo, 3 lápis e 1 caderno por $R\$34{,}00$.

Para comparar os preções unitários dessa papelaria com outras o comércio, o Sr. Ricardo calculou os preções de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é:

A)R$24,00. B)R$18,00. C)R$16,00. D) R$10,00. E)R$12,00.

Após o tempo, resolveríamos com eles esse sistema no quadro seguindo um método qualquer. No próximo momento, comentaremos sobre a definição de sistemas de três equações com três incógnitas e daremos mais algumas atividades para fixação de ideias.

Sistema de equações do 1° grau com três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por três equações do 1° grau do tipo $ax + by + cz = d$, com três incógnitas, x, y e z. Para resolver esses sistemas, procuramos isolar uma incógnita de alguma equação e a substituímos nas outras, de modo a trabalhar com um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Dizemos que a solução do sistema formado por três equações do 1° grau é o conjunto $S: \{(x, y, z)\}$.

Em seguida, para completar a aula, pediremos que resolvam essas duas atividades para fixação do conteúdo. Nós andaremos em volta da sala, observando, incentivando e respondendo dúvidas sobre os métodos sendo utilizados. A correção será feita por nós no quadro e caso não haja tempo, será enviado no grupo do *Whats app* um vídeo explicando as resoluções.

7ª Atividades de fixação – Sistemas lineares. (30 min)

1) Apresente a solução para o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

2) **(ENEM 2018)** Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00.

Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A)20. B)24. C)29. D)40. E)48.

8° Resolução dos problemas da lista (25 min)

1) Apresente a solução para o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12\ (1) \\ x - 3y + 5z = 1(2) \\ 2x - y + 3z = 10\ (3) \end{cases}$$

1- Passo: Isolamos uma incógnita entre as três equações
De (1) isolamos x, ficando $x = 12 - 2y - z$.

2- Passo: Substituímos o valor da incógnita isolada nas outras duas equações de modo a deixá-las como equações com duas incógnitas.
De (2), temos $(12 - 2y - z) - 3y + 5z = 1 \Rightarrow -5y + 4z = -11$. Agora, de (3), $2(12 - 2y - z) - y + 3z = 10 \Rightarrow -5y + z = -14$.

3- Passo: Escrevemos o novo sistema com essas duas novas equações e procuramos resolvê-lo novamente com o método da substituição.
$\begin{cases} -5y + 4z = -11 \\ -5y + z = -14 \end{cases}$ Resolvendo esse sistema encontramos $y = 3$ e $z = 1$.

4- Passo: Retornamos na equação isolada do passo 1 para descobrir o valor da última incógnita.
Com esses dois valores determinamos o valor de $x = 12 - 6 - 1 = 5$. Assim a solução é o conjunto formado pelo trio ordenado $S = \{(5, 3, 1)\}$.

5- Passo: Usando agora o método da adição, multiplicamos a linha um por -1.
$\begin{cases} -5y + 4z = -11 \\ -5y + z = -14 \end{cases}$ Resolvendo esse sistema encontramos $-3z = -3 \Longrightarrow z = 1$ e $-5y + 1 = -14 \Longrightarrow y = 3$.
Logo, como $y = 3$ e $z = 1$, temos que $x = 12 - 6 - 1 = 5$.

2)(ENEM 2018) Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00.

Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A)20. B)24. C)29. D)40. E)48.

R: O enunciado nos diz que uma loja vende automóveis em N parcelas, chamando de x o valor dessas parcelas, podemos escrever o valor o valor total do automóvel como sendo $Vt = Nx$, que corresponde a primeira possibilidade de pagamento. A segunda possibilidade é se acrescentar cinco parcelas das que já tem N, e pagar R$200,00 reais a menos do valor das parcelas x, e isso vai ser igual ao valor total do automóvel que não mudou, então temos a seguinte expressão $(N+5)(x-200) = Nx$. A terceira possibilidade seria a diminuição de 4 parcelas das que já tem, subindo em R$232,00 o valor das parcelas, mas ainda seria igual ao valor total do carro que não mudou, temos a expressão $(N-4)(x+232) = Nx$. Realizando a distributiva em ambos os produtos, temos

$$Nx - 200N + 5x - 1000 = Nx \Longrightarrow$$

$$-200N + 5x = 1000$$

$$Nx + 232N - 4x - 928 = Nx \Longrightarrow$$

$$232N - 4x = 928$$

Resolvendo o sistema de equações seguindo o método da comparação.

$$\begin{cases} -200N + 5x = 1000 \\ 232N - 4x = 928 \end{cases}$$

Da primeira equação, isolando x, temos $x = \frac{1000+200N}{5} = 200 + 40N$. Da segunda equação, isolando x, temos $x = \frac{(928-232N)}{-4} = -232 + 58N$. Igualando as equações,

$$-232 + 58N = 200 + 40N$$

$$432 = 18N$$

$$N = \frac{432}{18} = 24$$

Alternativa B.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será considerada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos de equações, no desempenho ao longo das atividades, apresentando oralmente novos métodos de resolução de sistemas e de tarefas.

Referências:

ALMERANA, D. F.. **Oxy da matemática**. 2012. Disponível em: https://oxyzdamatematica.blogspot.com/2012/11/ . Acesso em: 19 fev. 2022.

GIOVANNI Jr, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**: 8º ano. São Paulo: FTD, 2018.

LOPES, C. M. C.; ALENCAR, A. P.; ALENCAR, G. P. **Matemática**: ponto de conexão. 8º ano. Curitiba: Base Editorial, 2015.

MENINO PENSANDO. Disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/menino-pensando_12847318.htm. Acesso em 19 fev. 2022.

PROVA UNIOESTE – 2017 – UNIOESTE – VESTIBULAR. **Qconcursos**. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/provas/unioeste-2017-unioeste-vestibular-tarde. Acesso em: 19 fev. 2022.

RIBEIRO, A. G. Equação do 1° grau do Enem. **Super Vestibular**. Disponível em: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/equacao-1-grau-no-enem.htm. Acesso em: 04 dez. 2021.

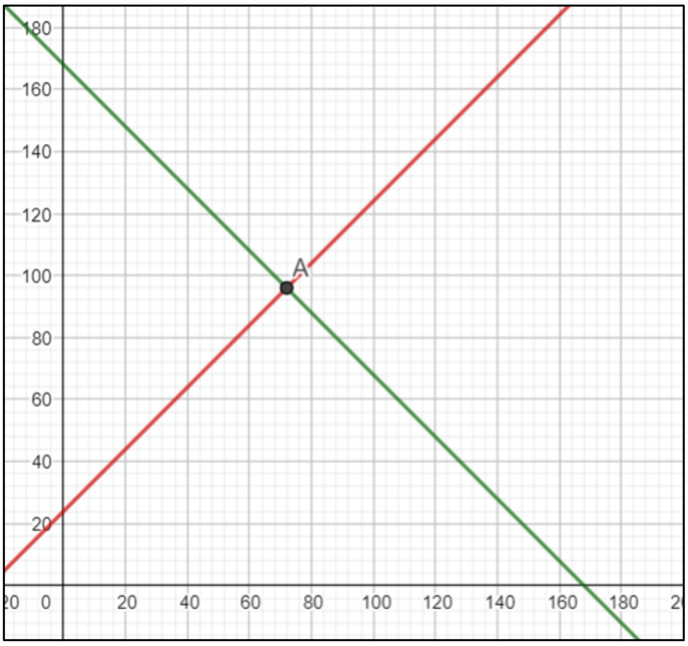
SEQUÊNCIA DIDÁTICA – MATEMÁTICA: Espaço e forma. Secretaria de Estado da Educação Secretaria Adjunta de Gestão da Rede de Ensino e da Aprendizagem. Programa Mais IDEB. 2019. Disponível em: https://www.educacao.ma.gov.br/files/2019/06/SD_MTM_D09_Posicoes_relativas_entre_retas-Estudante.pdf. Acesso em: 20 mar. 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. Resolução de Problemas com Sistemas de Equações. **Brasil Escola**. Disponível em:https://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm. Acesso em: 04 dez. 2021.

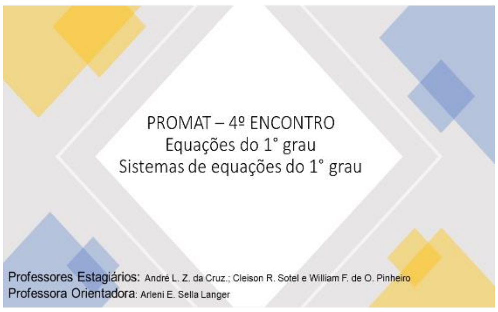
SISTEMA COM TRÊS VARIÁVEIS. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-com-tres-variaveis.htm. Acesso em: 19 fev. 2022.

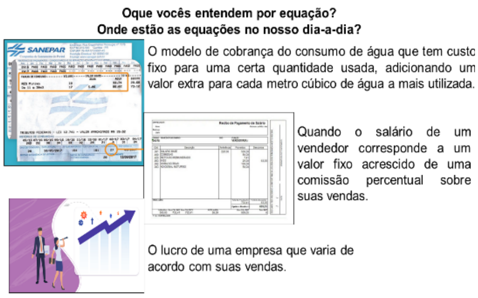
Apêndices:

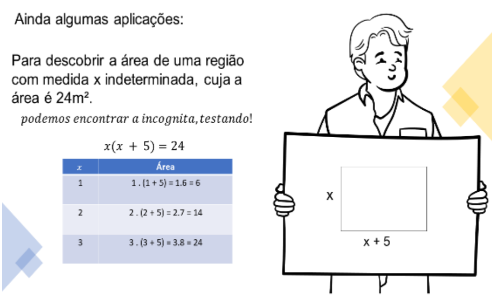
A)

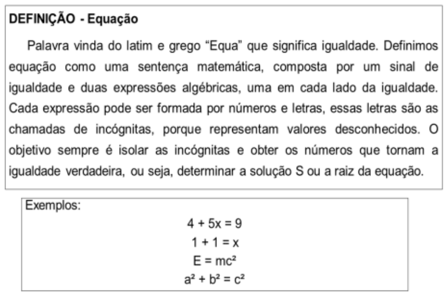


B)









DEFINIÇÃO – Raízes de uma equação
Definimos como raiz de uma equação o valor que suas incógnitas assumem de modo que essa equação seja válida perante a igualdade. O número de raízes de uma equação é dado pelo grau que ela possui.

Exemplos

$a) 2x = 10$ 5 é a raiz da equação (a), porque 2*(5) = 10 é uma sentença verdadeira

$b) x + 3 = 7$ 5 não é a raiz da equação(b), por que 5+3=7 é uma sentença falsa.

Atividade introdutória 1

(UFG – 2010 – 2° Fase) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a $\frac{2}{3}$ do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

$x = Valor\ da\ passagem\ de\ um\ adulto$ $\quad \frac{2}{3}x = Valor\ da\ passagem\ de\ uma\ criança$

$3x + 2\frac{2}{3}x = 8125$

Como vocês resolveram?
Vamos discutir!

DEFINIÇÃO – Equação do 1° grau

Uma equação do 1°grau (linear), é um tipo de equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, sendo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ coeficientes reais, as incógnitas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ e c o termo independente. Além disso, o polinômio que forma as expressões tem grau um.

Exemplos de equações do 1° grau

$a)\ 4x - 7y = 9$ $\quad$ d) $\frac{x}{3} + y = 2$

$b)\ 2x - 1 = 2$

$c)\ x + y - 2z = 3$

Exemplos de equações que não são do 1° grau

$a)\ x^2 - 2x + 2 = 0$ $\quad$ d)$x^3 + 2x^2 - x = 0$

$b)\ sen\ x + 1 = 0$ $\quad$ e) $x + y = z^2$

$c)\ x^2 + y^2 = 2$

Atividade introdutória 2

Cláudio usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para fazer um pagamento no valor de R$140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total havia 10 notas?

Fonte: encurtador.com.br/fxV39

Como vocês resolveram?

Vamos chamar de x a quantidade de notas de R$20,00 e de y a quantidade de notas de R$5,00.

Assim, temos o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= -x + 10 \\ y &= \frac{140 - 20x}{5} = -4x + 28 \end{aligned}$$

$y = 10 - x$	
x	y
2	8
4	6
6	4

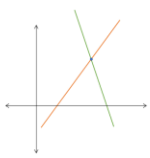
$y = -4x + 28$	
x	y
2	20
4	12
6	4

Vamos fazer um gráfico dessas duas equações !

Retas concorrentes

Dadas as retas $reta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $reta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, quando se interceptam em um único ponto, dizemos que são **concorrentes**, isto é, as duas retas possuem um único ponto (x, y) em comum.

$y = ax + b$



Sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_2y = c1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por duas equações do 1° grau do tipo $ax + by = c$, com duas incógnitas, x e y. As retas dessas equações quando são concorrentes, apresentam um único par de coordenadas (x, y) que satisfaz ambas as equações, ou seja, é um ponto que pertence as duas equações.

Dizemos que a solução do sistema formado por duas equações do 1° grau é o conjunto $S: \{(x, y)\}$.

Método da substituição: Esse método consiste em isolar uma incógnita de alguma das equações e substituí-la nas outras equações.

$$y = \frac{24-6x}{2}$$

$$\begin{cases} 6x + 2y = 24 \\ 12x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$12x - 3\left(\frac{24-6x}{2}\right) = 6$$

Método da adição: O segundo método consiste em realizar multiplicação (divisão) de todos os termos de uma das equações (ou em mais de uma), de tal modo que, ao somar os termos da equação 1 numa equação 2, uma de suas incógnitas fique com o coeficiente zero.

Exemplo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + y = 1 \quad *(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 10x + 2y = 2 \end{cases} +$$

$$10x + 3x + 2y - 2y = 4 + 2$$

$$13x = 6$$

Método da comparação: O terceiro método consiste em isolar uma mesma incógnita em duas equações e igualar esses dois valores.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 32 \\ x + 10y = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{32-6y}{2} = 16 - 3y$$

$$x = 2 - 10y$$

$$x = x$$

$$16 - 3y = 2 - 10y$$

Intervalo (20 minutos)

Atividade introdutória 3

(IFPE – 2012 adaptado) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, lápis e caderno. As três ofertas eram:

1) 5 estojo, 4 lápis e 1 caderno por $R\$54{,}00$.

2) 1 estojo, 2 lápis e 1 caderno por $R\$26{,}00$.

3) 2 estojo, 3 lápis e 1 caderno por $R\$34{,}00$.

Para comparar os preções unitários dessa papelaria com outras o comércio, o Sr. Ricardo calculou os preções de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é:

A)R$24,00. B)R$18,00. C)R$16,00. D) R$10,00. E)R$12,00.

Vamos Resolver!

Conjunto solução S={(6,2,16)}

Sistema de equações do 1° grau com três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por três equações do 1° grau do tipo $ax + by + cz = d$, com três incógnitas, x, y e z. Para resolver esses sistemas, procuramos isolar uma incógnita de alguma equação e a substituímos nas outras, de modo a trabalhar com um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Dizemos que a solução do sistema formado por três equações do 1° grau é o conjunto $S{:}\,\{(x, y, z)\}$.

Atividades de fixação – Sistemas lineares

1) Apresente a solução para o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \ (1) \\ x - 3y + 5z = 1 (2) \\ 2x - y + 3z = 10 \ (3) \end{cases}$$

1. Passo: Isolamos uma incógnita entre as três equações

   De (1) isolamos x, ficando $x = 12 - 2y - z$.

2. Passo: Substituímos o valor da incógnita isolada nas outras duas equações de modo a deixá-las como equações com duas incógnitas.

   De (2), temos $(12 - 2y - z) - 3y + 5z = 1 \Rightarrow -5y + 4z = -11$.

   Agora, de (3), $2(12 - 2y - z) - y + 3z = 10 \Rightarrow -5y + z = -14$.

3. Passo: Escrevemos o novo sistema com essas duas novas equações e procuramos resolvê-lo pelo método que desejamos. Nesse caso, vamos usar o método da substituição.

   $\begin{cases} -5y + 4z = -11 \\ -5y + z = -14 \end{cases}$ Resolvendo esse sistema encontramos $y = 3$ e $z = 1$.

4. Passo: Retornamos na equação isolada do passo 1 para descobrir o valor da última incógnita.

   Com esses dois valores determinamos o valor de $x = 12 - 6 - 1 = 5$. Assim a solução é o conjunto formado pelo trio ordenado $S = \{(5, 3, 1)\}$.

2) (**ENEM 2018)** Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00.

Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A)20. B)24. C)29. D)40. E)48.

Chamamos de N a quantidade de parcelas e x o valor de cada parcela.

O valor total do carro se ele for pago à vista é $\mathrm{Vt} = \mathrm{Nx}$

Na segunda possibilidade, aumentamos 5 parcelas das que já tínhamos, diminuímos R$200,00 do valor de cada parcela, e isso é igual ao valor total do carro Nx.

$$(\mathrm{N}+5)(\mathrm{x}-200) = \mathrm{Nx}$$

Na terceira possibilidade, diminuímos 4 parcelas das que já tínhamos, aumentamos R$232,00 do valor de cada parcela, e isso é igual ao valor total do carro Nx.

$$(\mathrm{N}-4)(\mathrm{x}+232) = \mathrm{Nx}$$

Dessas duas equações, vamos ter:

$$1)\ Nx - 200N + 5x - 1000 = Nx \Longrightarrow$$
$$-200N + 5x = 1000$$
$$2)\ Nx + 232N - 4x - 928 = Nx \Longrightarrow$$
$$232N - 4x = 928$$

Resolvendo o sistema de equações seguindo o método da comparação.

$$\begin{cases} -200N + 5x = 1000 \\ 232N - 4x = 928 \end{cases}$$

Usando o método da comparação.

Vamos escolher isolar o x de cada equação. Dá primeira equação temos, $x = \frac{1000+200N}{5} = 200 + 40N$. Dá segunda equação, isolando x, temos $x = \frac{(928-232N)}{-4} = -232 + 58N$. Igualando as equações, $x = x$.

$$-232 + 58N = 200 + 40N$$

$$432 = 18N$$

$$N = \frac{432}{18} = 24$$

8.1. **Resoluções das atividades;**

Atividade Introdutória 1

1- (UFG – 2010 – 2° Fase) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a 2/3 do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

Resolução:

Sendo x o valor da passagem de um adulto teremos a seguinte equação, $3x + 2 * \frac{2}{3}x = 8125$. Solucionando a mesma, encontramos $x = 1875$. Logo, o adulto paga um valor de R$ 1.875,00 e uma criança pagaria $\frac{2}{3}(1875) = 1250$, o valor de R$ 1.250,00.

Atividade introdutória 2

Claudio usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$5,00 para fazer um pagamento no valor de R$140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo, sabendo que no total foram 10 notas?

Resolução:

X = número de notas de R$20,00   Y= número de notas de R$5,00

Equação do número de notas usadas: $x + y = 10$

Equação da quantidade e valor das notas: $20x + 5y = 140$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

Passo: Aplicando o método da substituição. Na 1° equação, isolamos o x

$x = 10 - y$

4- Passo: Substituindo na 2° equação.

$20(10 - y) + 5y = 140$ com $200 - 20y + 5y = 140$ que é igual a $-15y = -60$. Logo, $y = 4$.

5- Passo: Substituímos o valor encontrado de y na equação do passo 1.

$x = 10 - 4 = 6$. Logo, a solução é 6 notas de R$20,00 e 4 notas de R$5,00. S:{(6,4)}

Atividade introdutória 3

1- (IFPE – 2012 adaptado) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, lápis e caderno. As três ofertas eram:

4) 5 estojos, 4 lápis e 1 caderno por $R\$54,00$.
5) 2 estojos, 4 lápis e 2 cadernos por $R\$52,00$.
6) 2 estojos, 3 lápis e 1 caderno por $R\$34,00$.

Para comparar os preções unitários dessa papelaria com outras o comércio, o Sr. Ricardo calculou os preções de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é:

A)R$24,00. B)R$18,00. C)R$16,00. D) R$10,00. E)R$12,00.

R:

Chamando de x o valor do estojo, y o valor do lápis e z o valor do caderno, podemos montar o seguinte sistema de três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} 5x + 4y + z = 54\ (1) \\ x + 2y + z = 26\ (2) \\ 2x + 3y + z = 34\ (3) \end{cases}$$

Escolhendo resolver pelo método da soma.

1º Passo: Isolamos uma incógnita entre as três equações

Devemos isolar uma incógnita para trabalhar com apenas duas. Escolhendo isolar o z na equação (1), temos $z = 54 - 5x - 4y$.

2º Passo: Substituímos o valor da incógnita isolada nas outras duas equações de modo a deixá-las como equações com duas incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y + (54 - 5x - 4y) = 26 \\ 2x + 3y + (54 - 5x - 4y) = 34 \end{cases}$$

3º Passo: Escrevemos o novo sistema com essas duas novas equações e procuramos resolvê-lo agora usando o método da soma.

$$\begin{cases} x + 2y + 54 - 5x - 4y = 26 \\ 2x + 3y + 54 - 5x - 4y = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 2y = -28\ (4) \\ -3x - y = -20\ (5) \end{cases}$$

Escolhendo multiplicar em ambos os lados da equação (5) por -2, com o objetivo de zerar a incógnita y.

$$\begin{cases} -4x - 2y = -28 \\ 6x + 2y = 40 \end{cases}$$

$$6x - 4x = 40 - 28$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

$$-4(6) - 2y = -28$$

$$-24 - 2y = -28$$

$$-2y = -4$$

$$y = 2$$

4º Passo: Retornamos na equação isolada do passo 1 para descobrir o valor da última incógnita.

$$z = 54 - 5(6) - 4(2) = 16$$

Conjunto solução S = {(6,2,16)}

O problema nos pede qual é a soma dos três preços é $x + y + z = 24$, alternativa A.

2) Apresente a solução para o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

R: Apresente a solução para o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12\ (1) \\ x - 3y + 5z = 1(2) \\ 2x - y + 3z = 10\ (3) \end{cases}$$

6- Passo: Isolamos uma incógnita entre as três equações
   De (1) isolamos x, ficando $x = 12 - 2y - z$.

7- Passo: Substituímos o valor da incógnita isolada nas outras duas equações de modo a deixá-las como equações com duas incógnitas.

De (2), temos $(12 - 2y - z) - 3y + 5z = 1 \Rightarrow -5y + 4z = -11$. Agora, de (3), $2(12 - 2y - z) - y + 3z = 10 \Rightarrow -5y + z = -14$.

8- Passo: Escrevemos o novo sistema com essas duas novas equações e procuramos resolvê-lo novamente com o método da substituição.

$\begin{cases} -5y + 4z = -11 \\ -5y + z = -14 \end{cases}$ Resolvendo esse sistema encontramos $y = 3$ e $z = 1$.

9- Passo: Retornamos na equação isolada do passo 1 para descobrir o valor da última incógnita.

Com esses dois valores determinamos o valor de $x = 12 - 6 - 1 = 5$. Assim a solução é o conjunto formado pelo trio ordenado $S = \{(5, 3, 1)\}$.

10- Passo: Usando agora o método da adição, multiplicamos a linha um por -1.

$\begin{cases} -5y + 4z = -11 \\ -5y + z = -14 \end{cases}$ Resolvendo esse sistema encontramos $-3z = -3 \Longrightarrow z = 1$ e $-5y + 1 = -14 \Longrightarrow y = 3$.

Logo, como $y = 3$ e $z = 1$, temos que $x = 12 - 6 - 1 = 5$.

2) (ENEM 2018) Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00.

Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A)20. B)24. C)29. D)40. E)48.

R: O enunciado nos diz que uma loja vende automóveis em N parcelas, chamando de x o valor dessas parcelas, podemos escrever o valor total do automóvel como sendo $Vt = Nx$, que corresponde a primeira possibilidade de pagamento. A segunda possibilidade é se acrescentar cinco parcelas das que já tem N, e pagar R$200,00 reais a menos do valor das parcelas x, e isso vai ser igual ao valor total do automóvel que não mudou, então temos a seguinte expressão $(N+5)(x-200)=Nx$. A terceira possibilidade seria a diminuição de 4 parcelas das que já tem, subindo em R$232,00 o valor das parcelas, mas ainda seria igual ao valor total do carro que não mudou, temos a expressão $(N-4)(x+232)=Nx$. Realizando a distributiva em ambos os produtos, temos

$$Nx-200N+5x-1000=Nx \Longrightarrow$$

$$-200N+5x=1000$$

$$Nx+232N-4x-928=Nx \Longrightarrow$$

$$232N-4x=928$$

Resolvendo o sistema de equações seguindo o método da comparação.

$$\begin{cases} -200N+5x=1000 \\ 232N-4x=928 \end{cases}$$

Da primeira equação, isolando x, temos $x=\frac{1000+200N}{5}=200+40N$. Da segunda equação, isolando x, temos $x=\frac{(928-232N)}{-4}=-232+58N$. Igualando as equações,

$$-232+58N=200+40N$$

$$432=18N$$

$$N=\frac{432}{18}=24$$

Alternativa B.

8.2. **Material entregue aos alunos;**

Definição Equação: Palavra vinda do latim e grego “Equa” que significa igualdade. Definimos equação como uma sentença matemática, composta por um sinal de igualdade e duas expressões algébricas, uma em cada lado da igualdade. Cada expressão pode ser formada por números e letras; essas letras são chamadas de incógnitas, porque representam valores desconhecidos. O objetivo sempre é isolar as

incógnitas e obter os valores que tornam a igualdade verdadeira, ou seja, determinar a solução S ou a raiz da equação.
Definição Raízes de uma equação: Definimos como raiz de uma equação o valor que suas incógnitas assumem de modo que essa equação seja válida perante a igualdade. O número de raízes de uma equação é dado pelo grau que ela possui.

Exemplos	
d) 2x=10	5 é a raiz da equação, porque 2*(5) = 10 é verdade.
e) x+1=10	9 é a raiz da equação, por que 9+1=10 é verdade.
f) x+3=7	5 não é a raiz da equação, por que 5+3=7 é falso.

Atividade Introdutória 1

(UFG – 2010 – 2° Fase) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a $\frac{2}{3}$ do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

Definição – Equação do 1° grau: Uma equação do 1°grau (linear), é um tipo de equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, sendo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ os coeficientes reais, as incógnitas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ e c o termo independente. Além disso, o polinômio que forma as expressões tem grau um.
Exemplos de equações do 1° grau.
c) $4x - 7y = 9$ $b)2x - 1 = 2$ $c)$ $\frac{x}{3} + y = 2$ d) $x + y - 2z = 3$
Exemplos de equações que não são do 1° grau.

c)	$x^2 - 2x + 2 = 0$	c)$x^3 + 2x^2 - x = 0$	e)$x^2 + y^2 = 2$
d)	$sen\, x + 1 = 0$	d)$x + y = z^2$	

Atividade introdutória 2

Claudio usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para fazer um pagamento no valor de R$140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que, no total, foram usadas 10 notas?

Retas concorrentes

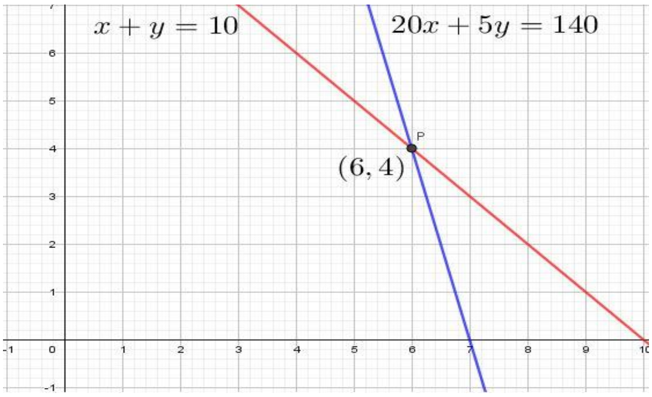
Dadas as retas $reta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $reta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, quando se interceptam em um único ponto, dizemos que são **concorrentes**, isto é, as duas retas possuem um único ponto (x, y) em comum.

Sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por duas equações do 1° grau do tipo $ax + by = c$, com duas incógnitas, x e y. As retas dessas equações quando são concorrentes, apresentam um único par de coordenadas (x, y) que satisfaz ambas as equações, ou seja, é um ponto que pertence as duas retas, representadas pelas duas equações.

Dizemos que a solução do sistema formado por duas equações do 1° grau é o conjunto $S: \{(x, y)\}$.



Representação gráfica do sistema de equações da atividade introdutória 2.

O ponto $(6,4)$ é solução do sistema, porque satisfaz ambas as equações.

Método da substituição: Esse método consiste em isolar uma incógnita de alguma das equações e substitui-la nas outras equações.

Método da adição: O segundo método consiste em realizar multiplicação(divisão) de todos os termos de uma das equações (ou em mais de uma), de tal modo que, ao somar os termos da equação 1 numa equação 2, uma de suas incógnitas fique com o coeficiente zero.

Método da comparação: O terceiro método consiste em isolar uma mesma incógnita em duas equações e igualar esses dois valores.

Atividade introdutória 3

(IFPE – 2012 adaptado) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, lápis e caderno. As três ofertas eram:

7) 5 estojo, 4 lápis e 1 caderno por $R\$54{,}00$.
8) 1 estojo, 2 lápis e 1 caderno por $R\$26{,}00$.
9) 2 estojo, 3 lápis e 1 caderno por $R\$34{,}00$.
Para comparar os preções unitários dessa papelaria com outras o comércio, o Sr. Ricardo calculou os preções de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é:

A)R$24,00. B)R$18,00. C)R$16,00. D) R$10,00. E)R$12,00.

Sistema de equações do 1° grau com três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por três equações do 1° grau do tipo $ax + by + cz = d$, com três incógnitas, x, y e z. Para resolver esses sistemas, procuramos isolar uma incógnita de alguma equação e a substituímos nas outras, de modo a trabalhar com um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Dizemos que a solução do sistema formado por três equações do 1° grau é o conjunto S: $\{(x, y, z)\}$.

Atividades de fixação – Sistemas lineares

1)Apresente a solução para o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

2) **(ENEM - 2018)** Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00.

Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A)20. B)24. C)29. D)40. E)48.

8.3. Relatório;

Encontro 4 26/03/2022

Relatório 4 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia 26 de março de 2022, sábado, no período da manhã, foi realizado o quarto encontro do Promat. Tivemos a participação de 20 alunos, e todos já haviam participado em pelo menos um encontro. As carteiras foram organizadas em grupos de cinco participantes, mas houve alunos que preferiram trabalhar individualmente. Os conteúdos abordados foram: equação do 1° grau, sistema de equações lineares e ideia de função do 1° grau.

Nossos objetivos eram trabalhar com os alunos o significado de equação. Foi perguntado a eles, o que entendem pela palavra "equação" e, esperávamos que eles contribuíssem com alguma ideia, contudo não sugeriram coisa alguma, provavelmente porque era muito cedo, ainda não haviam acordado direito ou estavam inseguros, então prosseguimos com a aula. Relembramos que não havia problema se eles errassem, sempre que introduzíamos algum conteúdo, perguntávamos o que eles já sabiam a respeito, no decorrer da aula tivemos mais participação dos alunos, com alguns alunos fazendo asserções às nossas explicações.

Após introduzirmos e tentarmos discutir o que são equações e raízes de equações, apresentamos algumas atividades. A primeira pedia que os alunos descobrissem o preço por pessoa, de um pacote de viagem que fora vendido por determinado valor sabendo que foram três adultos e duas crianças. A passagem da criança custava dois terços da de um adulto. Alguns alunos tiveram problemas em interpretar o enunciado, por isso o lemos com eles, ajudando-os nesta tarefa. A maioria conseguiu resolvê-la bem. Então a corrigimos no quadro e, passamos para o próximo problema. Nele a exigência era que os alunos descobrissem com quantas notas de vinte reais e quantas notas de cinco reais fora paga uma conta de 140 reais sabendo que se usaram dez notas para pagar a conta. Os alunos se saíram muito bem nessa tarefa e conseguiram resolver por tentativa e erro, eles atribuíram valor a uma das incógnitas e a partir daí deduziam o valor da outra, então verificaram se esses valores resolviam o problema. Explicamos para eles que esse problema podia ser representado por um sistema de equações lineares, e poderíamos resolvê-los de várias maneiras. Houve um grupo ao qual foi mostrado que era possível resolver fazendo desenho de notas de dinheiro e atribuindo valor conforme necessidade. Em seguida resolvemos no quadro usando uma tabela, montando o gráfico e, mostrando que a solução do sistema era o ponto de intersecção das retas correspondentes às equações lineares. Os alunos não demonstraram muita reação, mas nos exercícios seguintes utilizaram os métodos apresentados.

Depois do intervalo foram apresentados os métodos da adição, substituição e comparação, para resolução de sistemas lineares. Ficamos atentos para questionamentos, alguns alunos fizeram afirmações sobre os métodos, porém não pediram por esclarecimento, mas repetiram as explicações que demos como confirmação de que entenderam. No restante do tempo os alunos resolveram duas questões de vestibular, numa se pedia que descobrisse o valor da soma de três produtos, e seu valores erram dados em forma de um sistema linear de três variáveis e três equações, no outro problema era apresentado um sistema três por três e deveriam encontrar a solução do sistema. Alguns alunos tiveram menos dúvidas, os ajudamos na resolução de um sistema linear de ordem 3, após um tempo, o resolvemos no quadro. Foi perguntado se alguém gostaria de resolvê-lo, mas, ninguém se manifestou. Então mostramos a nossa resolução, ficando somente um exercício para ser terminado em casa.

Os alunos participaram bem, sempre passamos nas mesas perguntando, se tinham alguma dúvida que pudéssemos esclarecer. Eles fizeram todas as atividades; até uma dupla que parecia mais alheia ao que acontecia na aula fez as atividades propostas. Acreditamos que eles compreenderam as ideias de manipular as equações, com objetivo de descobrir o valor das incógnitas. Esperamos que no futuro possamos ter oportunidade de relembrar e reforçar os conceitos apresentados.

9. **Encontro 5: Plano de aula;**

5º Encontro - 02 de abril de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Função afim e função composta.

Objetivo geral: Relembrar as propriedades da função afim, suas aplicações e, como identificá-las em problemas do cotidiano. Compreender e desenvolver os conceitos de funções compostas e funções com várias sentenças.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes, ao final dessa aula de:

- Compreender, identificar e aplicar a função afim e seus casos particulares;
- Compreender a função composta e organizar suas variações, bem como usá-la na solução de problemas;
- Expressar a lei de formação de uma função afim a partir de dois pontos conhecidos;

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.
Recursos didáticos: *Notebook*, Folhas Quadriculadas, Projetor, *Power Point*, Folhas Sulfite quadriculadas.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que os alunos adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Nessa aula, procuraremos negociar a não utilização da calculadora, com o objetivo de trazer um estímulo para o cálculo mental e o uso de estratégias que facilitem e agilizem os cálculos. Isso se deve ao ENEM e outros vestibulares não permitirem sua utilização.

Utilizaremos o projetor no decorrer da aula para deixá-la mais dinâmica, apresentando os conteúdos em lâminas previamente preparadas. A resolução de tarefas ou anotações de exemplos será feita no quadro.

Os alunos serão organizados em grupos de quatro ou cinco elementos, facilitando o atendimento às dúvidas. Será entregue após o segundo momento a primeira lista, frente e verso, contendo todos os problemas para essa aula. A última lista, também frente e verso, possuirá o resumo do conteúdo e será entregue antes do oitavo momento.

1º Momento: O significado de função e sua definição. (15min)

No próximo momento, faremos três perguntas aos alunos para relembrá-los de assuntos básicos de funções, cada resposta será escrita no quadro. Caso queiram fazer alguma modificação no texto escrito a faremos. Um tempo de 10 minutos será usado para essa parte.

Perguntas para os alunos.

1) O que seria uma função?
2) Que diferenças podemos notar entre funções e equações?
3) Numa função, quais seriam as variáveis?

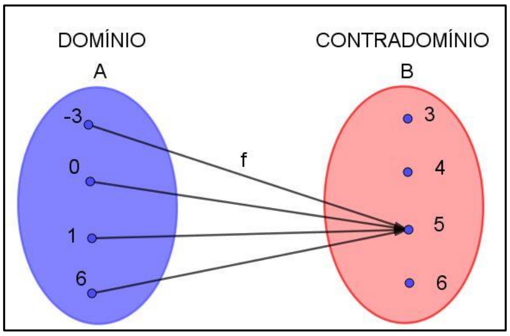
Definição – Função

Dados dois conjuntos A e B, uma função $f: A \to B$ é uma relação composta por três partes: O conjunto A que será o domínio da função $\left(A = D(f)\right)$; O conjunto B que será o contradomínio da função $\left(B = CD(f)\right)$; E uma regra que permite associar todo elemento x pertencente ao conjunto A, com um único elemento y pertencente ao conjunto B, chamada de Lei de formação. Dentro do Contradomínio existe um subconjunto chamado de Imagem da função $\left(Im(f)\right)$, composto por elementos de B que se relacionaram com algum valor x do domínio.

Usando o diagrama de flechas, uma função atenderia as seguintes condições: 1° De todos os pontos do domínio sai uma flecha; 2° De cada ponto do domínio sai somente uma única flecha. Ainda com estes diagramas apresentaremos a definição apresentadas a eles anteriormente.

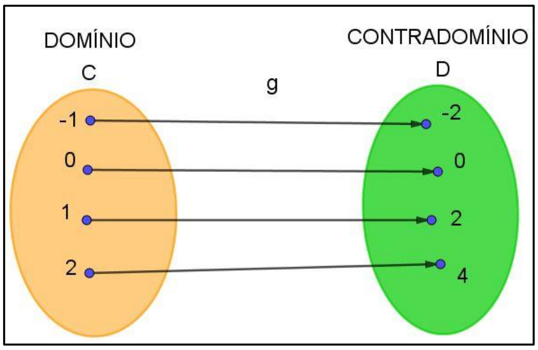
Representação dos que seriam funções

Figura 12: Figura representação de função diagrama de Venn



Fonte: Autores (2022)

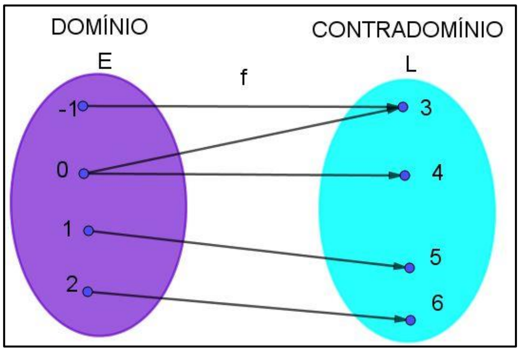
Figura 13: Representação de função.



Fonte: Autores (2022).

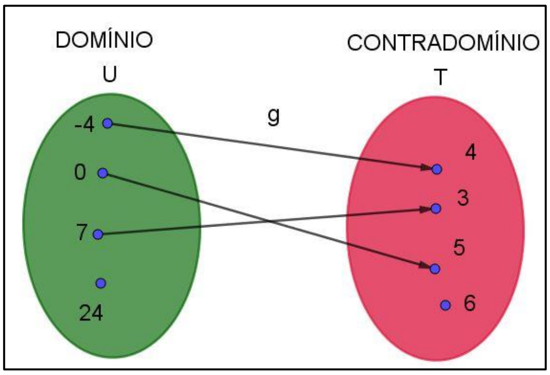
Representação dos que não seriam funções

Figura 14: Representação de não função.



Fonte: Autores (2022)

Figura 15: Representação não função.



Fonte: Autores (2022)

2° Momento: Atividade introdutória a função afim. (30min)

Em seguida, apresentaremos o clássico problema de abastecimento de tanque de água que pode ser representado por uma função afim. Exploraremos as características do problema, com objetivo de que os alunos percebam as características dessa função. Caso não encontrem, iremos destacá-las.

Durante a execução desta etapa, circularemos pela sala passando de mesa em mesa, perguntando aos alunos se tem alguma dúvida e, se necessário, esclarecendo suas demandas. Depois resolveremos esse problema pedindo a contribuição por parte dos alunos, encorajaremos sua participação, valorizando suas contribuições de forma honesta sem constrangê-los, por motivo algum.

Atividade introdutória 1

1) Uma empresa produtora de bebida possui um tanque de 5 mil litros de capacidade que é abastecido por duas torneiras que juntas tem uma vazão de 8 litros por minuto, sabendo que já havia 200 litros no tanque, responda.

a) Quanto tempo levará para enchê-lo completamente?

Esperamos que nesse primeiro questionamento os alunos, percebam a **relação entre tempo e quantidade de bebida**, caso isso não seja percebido, faremos aos alunos a seguinte indagação: “O que muda conforme o tempo passa?” ou “Se as torneiras estiverem abertas o volume de água vai ser sempre o mesmo?”.

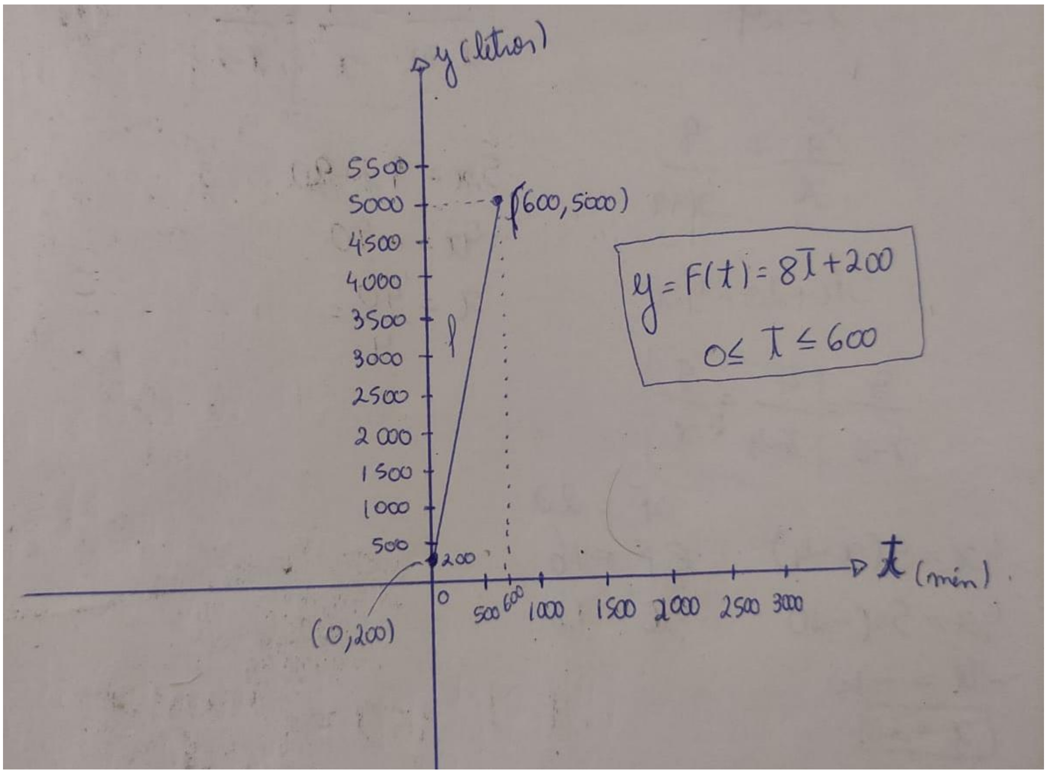
b) Se essas torneiras fossem abertas as duas horas da tarde, em que horas o tanque estaria totalmente cheio?

Nesta questão esperamos de deixar mais explicito, a **relação** de tempo com a capacidade. Dos 600 minutos obtidos na alternativa anterior, eles terão que fazer a transformação de minutos para horas, resultando em 10 horas, e somar a o horário de abertura das torneiras 14+10=24, ou seja, será completamente cheio as 24hrs ou 00:00hrs.

c) Construa o gráfico que representa a quantidade de bebida no tanque.

Aqui um aluno seria convidado para vir desenhar seu gráfico no quadro, caso ninguém queira, um estagiário faria o desenho do plano cartesiano e convidaria quem quisesse completá-lo. Se ainda assim ninguém se oferecer, desenharemos a o gráfico da função.

Figura 16: Gráfico atividade 1



Fonte: Autores (2022).

d) Em que ponto a reta intercepta o eixo “y” e o que esse número representa?

O objetivo aqui é perceber a condição inicial, e como isso afeta a lei de formação da função, ou seja, perceber que quando o tempo é zero já existe uma quantidade de bebida no tanque.

e) Quanto varia a quantidade de bebida no tanque de um minuto para outro?

Neste item esperamos que se perceba a **taxa de variação**, com que a quantidade de bebida aumenta, conforme o tempo passa.

Após o tempo para analisarem e resolverem a questão, vamos convidar alguns alunos para exporem oralmente a resolução das alternativas. Um tempo de 10 minutos será necessário para o término da resolução no quadro e discussões. Adiante, explicaremos a definição de função afim, retirando possíveis dúvidas que houvesse.

3°Momento: A definição de função afim e seus casos particulares. (55 min)

Função afim ou função polinomial de 1°grau – Uma função f com domínio nos $\mathbb{R}$ e dando resposta também nos $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função afim* quando **todo** elemento do domínio $x \in \mathbb{R}$ se associar a um **único** elemento do contradomínio $(ax + b) \in \mathbb{R}, a \neq 0$, simbolicamente é representada por:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = ax + b$$

$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e é $chamado\ de\ coeficiente\ angular\ do\ gráfico\ de\ f$

$b \in \mathbb{R}$ e é $chamado\ de\ coeficiente\ linear\ ou\ ponto\ de\ interseção\ com\ o\ eixo\ y$

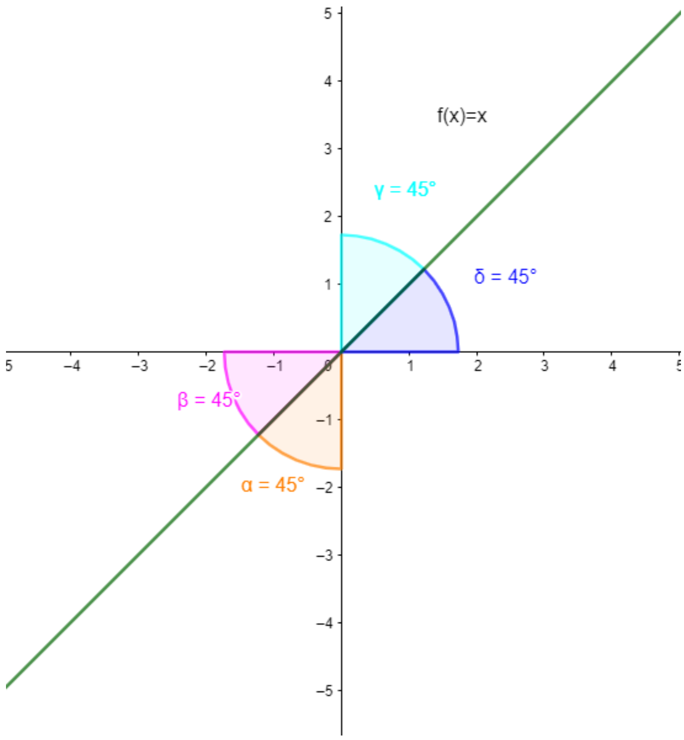
$x =$ variável independente

$y = (ax + b) = variável\ dependente$

Existem dois tipos de funções que são casos particulares da função afim, sendo elas: função linear e função identidade. Uma função afim pode ser uma dessas categorias dependendo dos valores dos coeficientes. Usaremos o exemplo da atividade anterior para discutir esses casos.

Identidade: Uma função afim se enquadra como função identidade quando $f(x) = x$, isto é, quando o coeficiente angular é igual a um e o coeficiente linear é igual a zero. Nessa situação, o gráfico é uma reta passa pela origem (0,0), cortando os quadrantes ímpares ao meio.

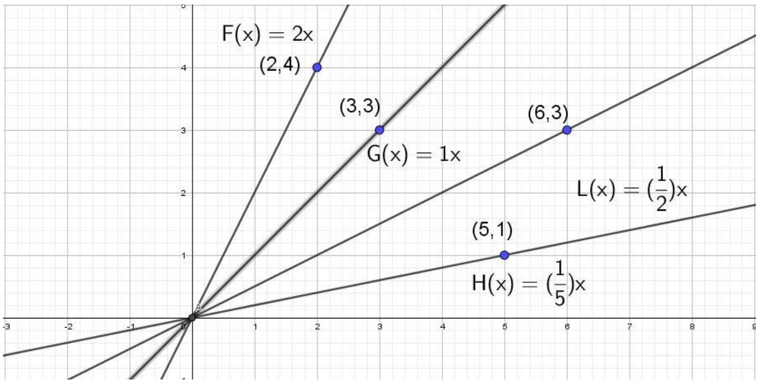
Figura 17: Gráfico função afim



Fonte: Autores (2022).

Linear: Uma função afim é considerada uma função linear se $f(x) = ax$, sendo o coeficiente angular diferente de zero e o coeficiente linear igual a zero. Nesses casos, a reta passa pela origem (0,0).

Figura 18: Ilustrações de funções afim



Fonte: Autores (2022).

Note que uma função identidade é um caso específico da função linear, quando $a = 1$.

Antes do intervalo, vamos apresentar o método para encontrar a lei de formação da função afim conhecendo dois pontos, através de um sistema de equações. Desse modo, poderão relembrar do conteúdo da aula passada. Em seguida, vamos apresentar um exercício contendo o gráfico de uma reta e dois pontos por onde ela passa. Daremos tempo de 10 minutos para resolverem utilizando o método anteriormente explicado ou algum outro que conheçam. Após esse tempo, vamos resolver o exercício no quadro.

Encontrando a lei de formação da função afim por meio de um sistema

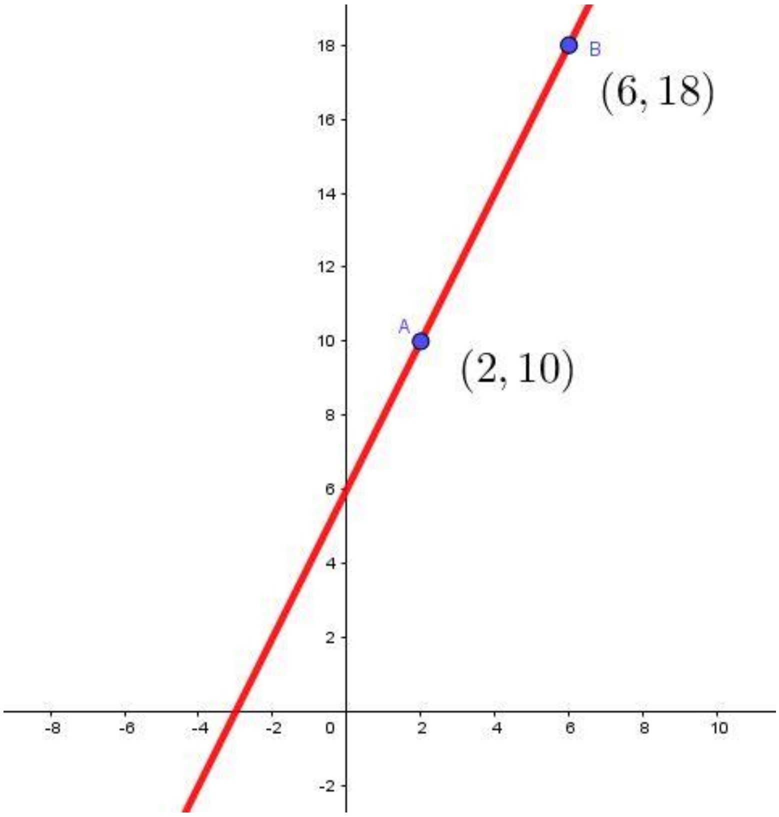
Podemos determinar a lei de formação de uma função afim, conhecendo apenas dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano cartesiano que pertencem a sua reta. Sabendo que a função afim é escrita como $f(x) = ax + b$, aplicamos nessa função os pontos x_1 e $x_2$conhecidos e igualamos a seus respectivos valores de y. Teremos um sistema de duas equações e duas incógnitas $(a\ e\ b)$.

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b = y_1 \\ f(x_2) = ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Exercício

1- O gráfico abaixo é de uma função afim que tem $f(2) = 10$ e $f(6) = 18$. Sabendo disso, determine a lei de formação dessa função.

Figura 19: Gráfico para mostrar lei de formação da reta.



Fonte: Autores (2022).

4° Momento: Intervalo. (20 min)

5°Momento: Equação fundamental da reta (20 min)

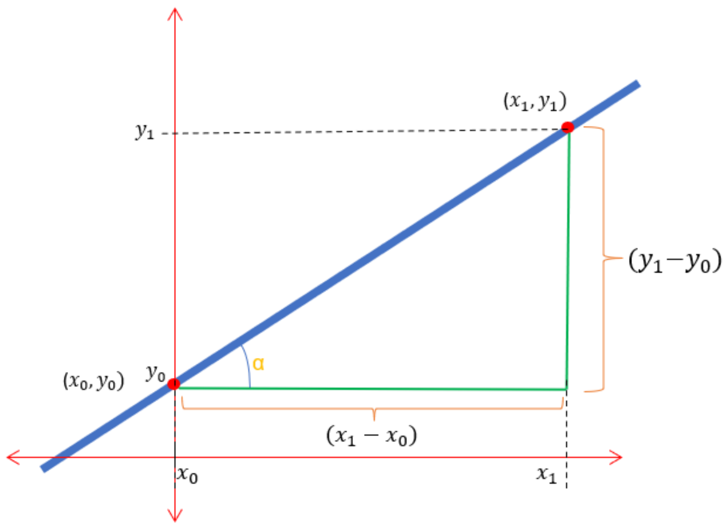
Depois do intervalo, comentaríamos da possibilidade de encontrar a lei de formação da função a partir da equação fundamental da reta. Aproveitaremos esse momento, para explicar o motivo a se chamar coeficiente angular.

Encontrando a lei de formação da função afim pela equação fundamental da reta

Toda reta não-vertical possui uma equação que representa todos os seus pontos. Conhecendo dois pontos $A(x, y)$ e $B(x, y)$ pertencentes a essa reta, determinamos o coeficiente angular $a = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$. Essa mesma igualdade pode ser expressa por $(y_1 - y_0) = a(x_1 - x_0)$ que é chamada de **equação fundamental da reta**. Conhecendo dois pontos, encontramos o coeficiente angular e aplicando um deles na equação fundamental da reta, encontramos a lei de formação da função.

A seguinte imagem será utilizada para mostrar esta equação.

Figura 20: Ilustração de pontos em uma reta.



Fonte: Autores (2022).

6°Momento: Reutilização de atividade para introduzir função composta. (35 min)

Reutilização da atividade introdutória 1 (15 min)

Dado o mesmo tanque de 5 mil litros do problema anterior, sendo abastecido pelas duas torneiras com 8 litros por minuto, contendo inicialmente 200 litros. Suponhamos que a bebida presente no tanque vai ser vendida para uma distribuidora a um preço de R$ 4,00 por litro. Sabendo desse novo fato, responda:

a) Qual vai ser a quantia arrecadada com a venda dos 5 mil litros da bebida?
b) Escreva a função que determina a quantia a ser arrecadada com a venda da bebida a partir do tempo de produção em minutos.

Ao longo da resolução, os estagiários observarão o desenvolvimento dos alunos da sala, respondendo dúvidas através de questionamentos, por exemplo, “De que forma podemos relacionar a quantia a ser recebida com a venda com o tempo gasto com a produção?”, “Quanto está para ser recebido de dinheiro depois do primeiro minuto de produção?”.

Após o término do tempo, serão convidados alguns alunos para exporem suas resoluções oralmente. Um tempo de 10 minutos será dedicado para essa resolução e, outros 10 minutos ´para a explicação da definição da função composta.

Definição – Função Composta

Seja F uma função de um conjunto A em um conjunto B, ($F: A \rightarrow B$), e seja G uma função de um conjunto B em um conjunto C, $(G: B \rightarrow C)$. A função composta de G em relação à F é uma função GoF de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

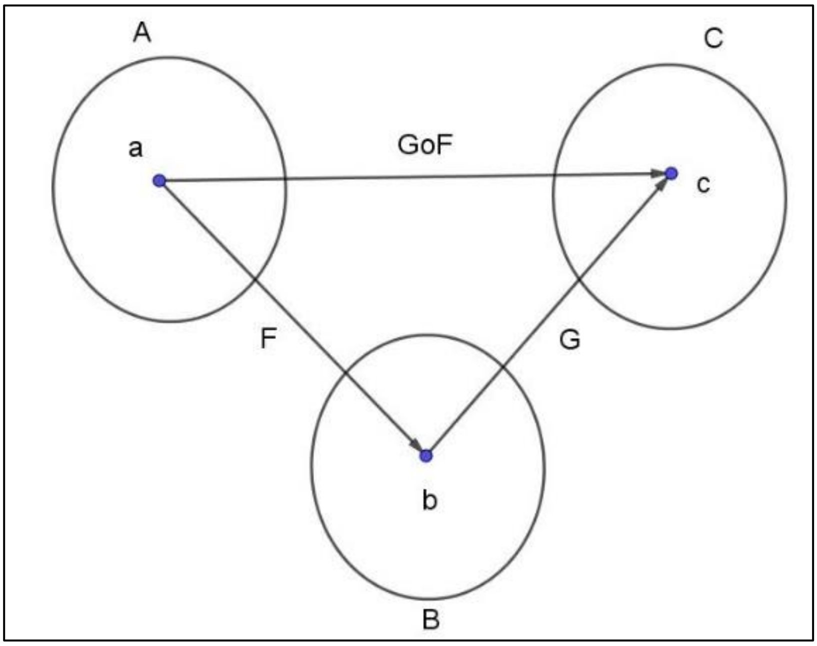
Aplica-se a x a uma função F, obtendo-se $F(x)$.

Aplica-se a $F(x)$ a função G, obtendo-se $G\big(F(x)\big) = GoF(x)$

Na função $GoF: A \rightarrow C$ o domínio da função G é igual ao contradomínio da função F e $Dom(F) = Dom(GoF)$ e $C\ Dom(G) = C\ Dom(GoF)$. Em alguns casos, o contrário também pode ser feito (FoG), bem como compor duas funções iguais, isto é, FoF ou GoG.

Abaixo está a representação da função composta usando o diagrama de flechas que usaremos em nossa explicação. Importante falar que $FoG(x)$ e $GoF(x)$ na grande maioria das vezes não são iguais.

Figura 21: Ilustração de composição de funções



Fonte: Autores (2022).

8° Momento: Lista de atividades sobre os conteúdos da aula e resolução deles. (50 min)

Entregaremos uma lista com um exercício e três problemas sobre os conteúdos tratados, passaremos de mesa em mesa novamente, tirando dúvidas e observando suas anotações. Um tempo de 35 minutos será dado para resolverem.

Em seguida, convidaríamos alguns alunos para exporem suas resoluções oralmente, enquanto um estagiário estaria as escrevendo no quadro e corrigindo a questão. Um tempo de 15 minutos é separado para essa parte, caso não de para terminar as correções nessa aula, será gravado um vídeo da resolução das atividades e postado no grupo do *Whats app*.

Lista de atividades (35 min)

1)Dadas as funções $f(x) = 5x + 10$, $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 3$ todas com domínio e contradomínio igual ao conjunto dos números reais, determine.

a) fog

b) goh

c) $fohog$

2) Uma função afim apresenta os valores $f(4) = 4$ e $f(6) = 16$. Sabendo disso, determine sua lei de formação.

3)**(UERJ – 2014 adaptada)** O reservatório A com o volume de 720 litros perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. Sabendo que o reservatório B iniciou com 60 litros de água. Determine em quanto tempo ambos terão o mesmo volume de água.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referências:

ENEM 2015 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 26 fev. 2022.

ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 26 fev. 2022.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**-Conjuntos Funções. 3 ed. Volume 1. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LESSA, José Roberto. Função Composta. Info escola. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/funcao-composta/. Acesso em: 26 fev. 2022.

LIMA, Elon Lages. **Um Curso de Análise**: Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

MANHOLLI, Patrícia Aparecida. Curso de extensão Pré Cálculo Diferencial Integral 1, aula 7. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/durski/curso-extensao-pre-calculo-dif.-e-int.-i/material-de-apoio-para-as-aulas/PRE_CALCULO_AULAS%207%20e%208.pdf/view. Acesso em: 26 fev. 2022.

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. Função do 1° Grau. **Mundo educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcao-1-grau.htm. Acesso em: 26 fev. 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues. Exercícios sobre função composta. **Brasil escola**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-composta.htm. Acesso em: 26 fev. 2022.

SANTOS, Thamires. Função Afim. **Educa mais Brasil**. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/funcao-afim. Acesso em: 26 fev. 2022.

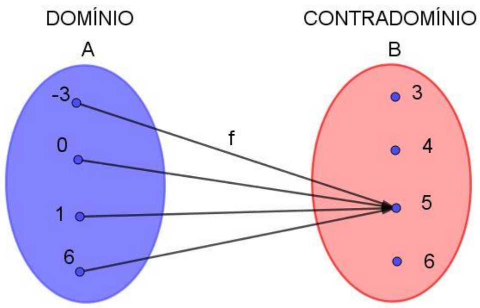
SCHIVANI, Juliani. Lista de exercícios – Funções com várias sentenças. Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN. Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-i/funcoes/lista-de-exercicios-funcoes-de-varias-sentencas/view. Acesso em: 26 fev. 2022.

Anexos:

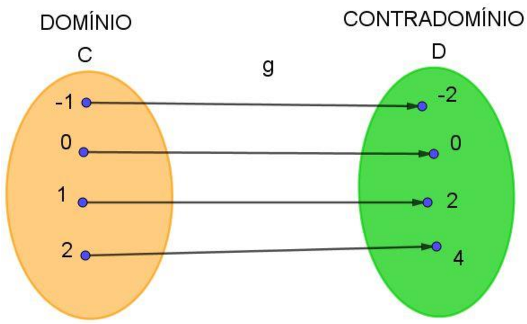
A)

Apêndice:

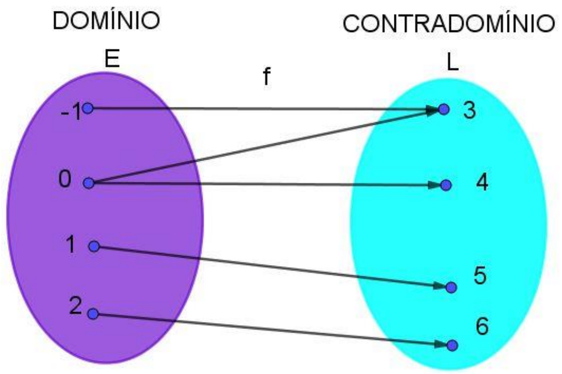
A)



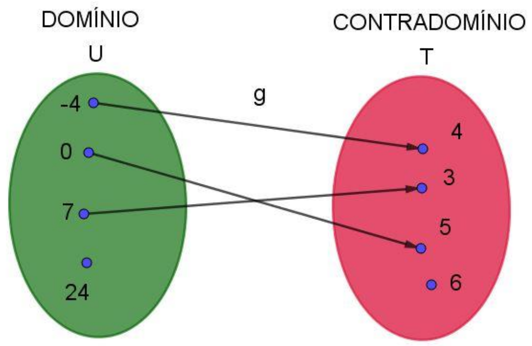
B)



C)

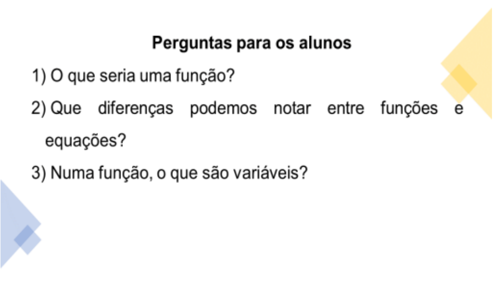

DOMÍNIO
E
f
CONTRADOMÍNIO
L
-1
0
1
2
3
4
5
6

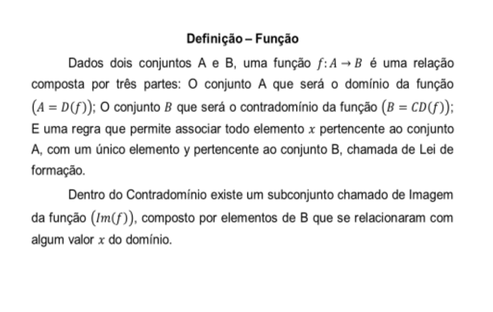
D)

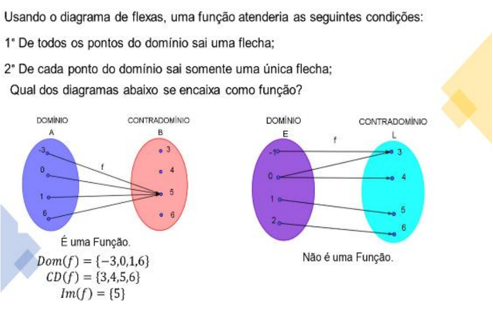

DOMÍNIO
U
g
CONTRADOMÍNIO
T
-4
0
7
24
4
3
5
6

E)

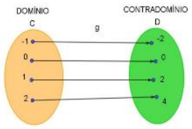

PROMAT – 5º ENCONTRO
Funções afim
Funções compostas
Professores Estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel e William F. de O. Pinheiro.
Professora Orientadora: Arleni E. Sella Langer


Perguntas para os alunos
1) O que seria uma função?
2) Que diferenças podemos notar entre funções e equações?
3) Numa função, o que são variáveis?

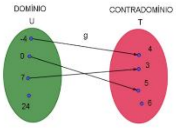

Definição – Função
Dados dois conjuntos A e B, uma função $f: A \rightarrow B$ é uma relação composta por três partes: O conjunto A que será o domínio da função $(A = D(f))$; O conjunto B que será o contradomínio da função $(B = CD(f))$; E uma regra que permite associar todo elemento x pertencente ao conjunto A, com um único elemento y pertencente ao conjunto B, chamada de Lei de formação.
Dentro do Contradomínio existe um subconjunto chamado de Imagem da função $(Im(f))$, composto por elementos de B que se relacionaram com algum valor x do domínio.


Usando o diagrama de flexas, uma função atenderia as seguintes condições:
1° De todos os pontos do domínio sai uma flecha;
2° De cada ponto do domínio sai somente uma única flecha;
Qual dos diagramas abaixo se encaixa como função?
DOMÍNIO
A
CONTRADOMÍNIO
B
É uma Função.
$Dom(f) = \{-3,0,1,6\}$
$CD(f) = \{3,4,5,6\}$
$Im(f) = \{5\}$
DOMÍNIO
E
CONTRADOMÍNIO
L
Não é uma Função.

Qual dos diagramas abaixo se encaixa como função?



É uma Função.
$Dom(g) = \{-1,0,1,2\}$
$CD(g) = \{-2,0,2,4\}$
$Im(g) = \{-2,0,2,4\}$



Não é uma função.

Atividade introdutória 1

Uma empresa produtora de bebida possui um tanque de 5 mil litros de capacidade que é abastecido por duas torneiras que juntas tem uma vazão de 8 litros por minuto, sabendo que já havia 200 litros no tanque, responda.

a) Quanto tempo levará para enchê-lo completamente?

b) Se essas torneiras fossem abertas as duas horas da tarde, em que horas o tanque estaria totalmente cheio?

c) Construa o gráfico que representa a quantidade de bebida no tanque em função do tempo.

d) Em que ponto a reta intercepta o eixo "y" e o que esse número representa?

e) Quanto varia a quantidade de bebida no tanque de um minuto para outro?

Função afim ou função polinomial de 1°grau – Uma função f com domínio nos $\mathbb{R}$ e dando resposta também nos $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função afim* quando **todo** elemento do domínio $x \in \mathbb{R}$ se associar a um **único** elemento do contradomínio $(ax + b) \in \mathbb{R}, a \neq 0$, simbolicamente é representada por :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = ax + b$$

$$a \in R, a \neq 0 \text{ e é chamado de coeficiente angular do gráfico de } f$$

$$b \in R \text{ e é chamado de coeficiente linear ou ponto de interseção com o eixo } y$$

$$y = ax + b$$

$$x = \text{variável independente}$$

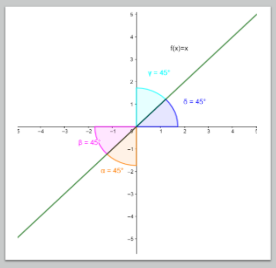
$$y = \text{variável dependente}$$

Existem dois tipos de funções que são casos particulares da função afim, sendo elas:
função linear $(f(x) = ax)$ e **função identidade** $(f(x) = x)$.

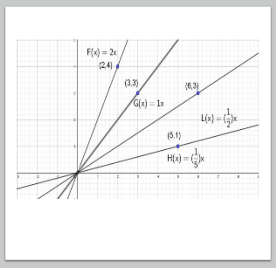
Vejamos a função da reta anterior:

$$f(x) = 8x + 200$$

Identidade:
Uma função afim se enquadra como função identidade quando $f(x) = x$, isto é, quando o coeficiente angular é igual a um e o coeficiente linear é igual a zero. Nessa situação, o gráfico é uma reta passa pela origem (0,0), cortando os quadrantes ímpares ao meio.



Linear:
Uma função afim é considerada uma função linear se $f(x) = ax$, sendo o coeficiente angular diferente de zero e o coeficiente linear igual a zero. Nesses casos, a reta passa pela origem (0,0).

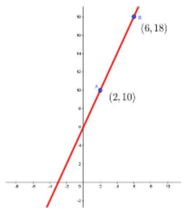


Encontrando a lei de formação da função afim por sistema

Podemos determinar a lei de formação de uma função afim, conhecendo apenas dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano cartesiano que pertencem a sua reta. Sabendo que a função afim tem formato $f(x) = ax + b$, aplicamos nessa função os pontos x_1 e $x_2$conhecidos e igualamos a seus respectivos valores de y. Teremos um sistema de duas equações e duas incógnitas $(a \text{ e } b)$.

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b = y_1 \\ f(x_2) = ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

1.O gráfico abaixo é de uma função afim que tem $f(2) = 10$ e $f(6) = 18$. Sabendo disso, determine a lei de formação dessa função.

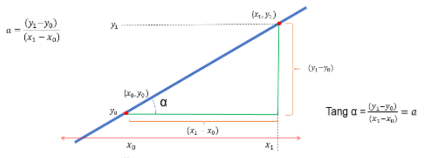


INTERVALO (20 min)

9h40min às 10h

Encontrando a lei de formação da função afim pela equação fundamental da reta

Toda reta não-vertical possui uma equação que representa todos os seus pontos. Conhecendo dois pontos $A(x, y)$ e $B(x, y)$ pertencentes a essa reta, determinamos o coeficiente angular com $a = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$. Essa mesma igualdade pode ser expressa por $(y_1 - y_0) = a(x_1 - x_0)$ que é chamada de **equação fundamental da reta**. Conhecendo dois pontos, encontramos o coeficiente angular e aplicando um deles na equação fundamental da reta, encontramos a lei de formação da função.



Reutilização da atividade introdutória 1 (15 min)

Dado o mesmo tanque de 5 mil litros do problema anterior, sendo abastecido pelas duas torneiras com 8 litros por minuto, contendo inicialmente 200 litros. Suponhamos que a bebida presente no tanque vai ser vendida para uma distribuidora a um preço de R$4,00 por litro. Sabendo desse novo fato, responda:

a) Qual vai ser a quantia de dinheiro arrecadada com a venda dos 5 mil litros da bebida?

b) Escreva a função que determina a quantia de dinheiro a ser recebida com a venda da bebida a partir do tempo de produção em minutos.

Definição – Função Composta

Seja F uma função de um conjunto A em um conjunto B, $(F: A \rightarrow B)$, e seja G uma função de um conjunto B em um conjunto C, $(G: B \rightarrow C)$. A função composta de G em relação à F é uma função GoF de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

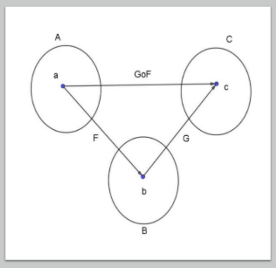
Aplica-se a x a uma função F, obtendo-se $F(x)$.

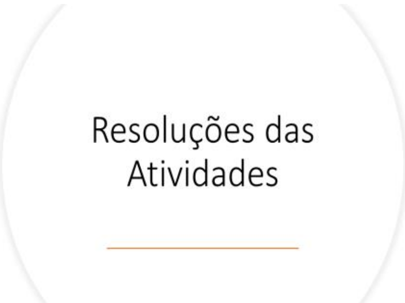
Aplica-se a $f(x)$ a função G, obtendo-se $G(F(x)) = GoF(x)$

Na função $GoF: A \rightarrow C$ o domínio da função G é igual ao contradomínio da função F e $Dom(F) = Dom(GoF)$ e $CDom(G) = CDom(GoF)$. Em alguns casos, o contrário também pode ser feito (FoG), bem como compor duas funções iguais, isto é, FoF ou GoG.

Observar através do diagrama de flechas

Atenção:
$FoG(x)$ e $GoF(x)$, na grande maioria das vezes não são iguais.





1)Dadas as funções $f(x) = 5x + 10$, $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 3$ todas com domínio e contradomínio igual ao conjunto dos números reais, determine.

$a)fog$ b)goh c)$fohog$

Resposta:

$a) f(g(x)) = 5(3x + 2) + 10 = 15x + 10 + 10 = 15x + 20$

$b) g(h(x)) = 3(x - 3) + 2 = 3x - 9 + 2 = 3x - 7$

$c) f\left(h(g(x))\right) = 5((3x + 2) - 3) + 10 = 5(3x - 1) + 10 = 15x - 5 + 10 = 15x + 5$

2) Uma função afim apresenta os valores $f(4) = 4$ e $f(6) = 16$. Sabendo disso, determine sua lei de formação.

Resolvendo por sistemas, vamos usar a forma da função afim $f(x) = ax + b$. Temos $f(4) = 4a + b = 4$ e $f(6) = 6a + b = 16$. Vamos ter o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 4a + b = 4 & (1) \\ 6a + b = 16 & (2) \end{cases}$$

Escolhendo resolver pelo método da soma, começamos multiplicando por (-1) a equação (2), teremos

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ -6a - b = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ -6a - b = -16 \end{cases}$$

Realizando a soma das duas equações,

$$-6a + 4a + b - b = -16 + 4$$
$$-2a = -12$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por (-1), temos

$$2a = 12$$
$$a = \frac{12}{2} = 6$$

Agora, substituindo o valor encontrado de a em alguma das equações iniciais, encontramos

$$4(6) + b = 4$$
$$24 + b = 4$$
$$b = 4 - 24 = -20$$

Logo, a lei de formação é dada por $f(x) = 6x - 20$.

3)**(UERJ – 2014 adaptada)** O reservatório A com o volume de 720 litros perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. Sabendo que o reservatório B iniciou com 60 litros de água. Determine em quanto tempo ambos terão o mesmo volume de água.

R: Chamando de x a quantidade de horas, podemos fazer as seguinte funções do 1° grau.

$$A(x) = 720 - 10x$$

$$B(x) = 60 + 12x$$

Para encontrar o momento que os dois reservatórios vão ter a mesmo volume de litros de água, basta igualar as duas funções $A(x) = B(x) \leftrightarrow 720 - 10x = 60 + 12x$ que é igual a

$$22x = 660$$

$$x = \frac{660}{22} = 30\ horas$$

9.1. **Resoluções das atividades;**

Atividade introdutória 1

Uma empresa produtora de bebida possui um tanque de 5 mil litros de capacidade que é abastecido por duas torneiras que juntas tem uma vazão de 8 litros por minuto, sabendo que já havia 200 litros no tanque, responda.

a) Quanto tempo levará para enchê-lo completamente?

$$t = minutos$$

$$f(t) = 8t + 200$$

$$5000 = 8t + 200$$

$$8t = 4800$$

$$t = \frac{4800}{8} = 600\, min$$

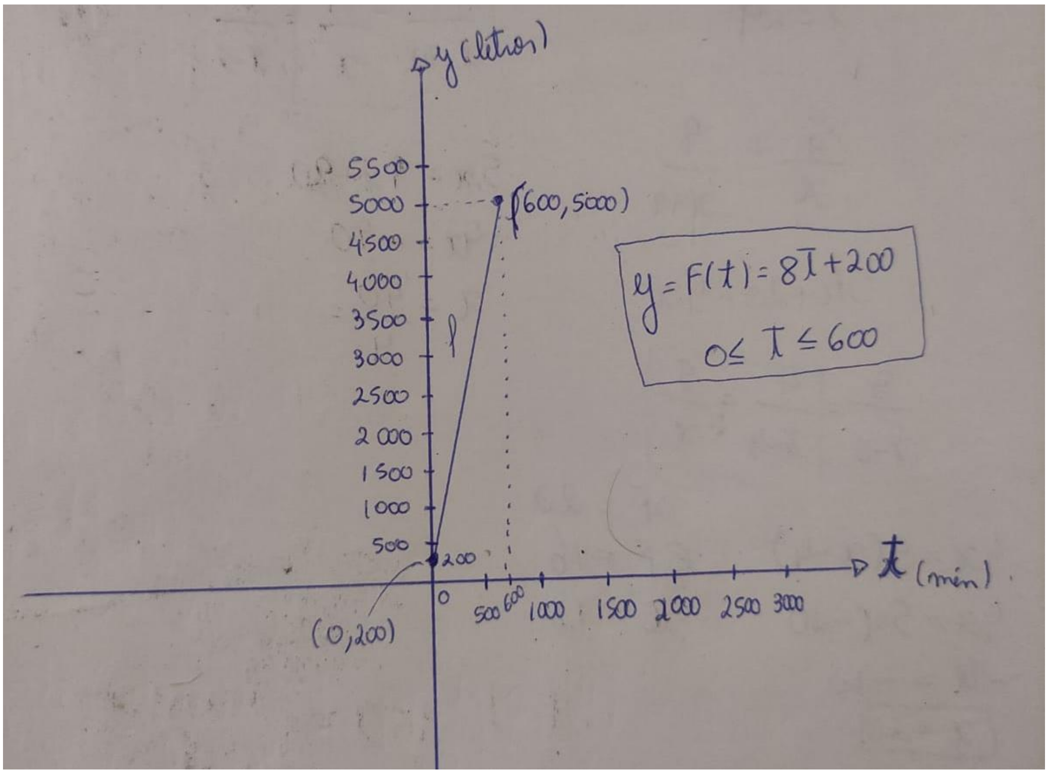
b) Se essas torneiras fossem abertas as duas horas da tarde, em que horas o tanque estaria totalmente cheio?

$$600\, minutos <=> 10\, horas$$

Logo, se foram abertas as duas da tarde, o tanque estará cheio na meia noite.

c) Construa o gráfico que representa a quantidade de água no tanque.

Gráfico atividade 1



Fonte: Autores (2022)

d) Em que ponto a reta intercepta o eixo “y” e o que esse número representa?

Intercepta o eixo y no ponto 200, esse número representa a quantidade de água que já estava no tanque, isto é, a quantidade fixa.

e) Quanto varia a quantidade de água no tanque de um minuto para outro?

A quantidade varia de 8 litros por minuto, que é a taxa de variação ou coeficiente angular.

Exercício

2- O gráfico abaixo é de uma função afim que tem $f(2) = 10$ e $f(6) = 18$. Sabendo disso, determine a lei de formação dessa função.

Resolvendo por sistema, usando a forma da função afim $f(x) = ax + b,$ vamos ter $f(2) = 2a + b = 10$ e $f(6) = 6a + b = 18$. Temos o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} 2a + b = 10 & (1) \\ 6a + b = 18 & (2) \end{cases}$$

Vamos utilizar o método da substituição, isolando b na equação (1), temos $b = 10 - 2a$. Substituindo o valor de b na equação (2), vamos ter

$$6a + (10 - 2a) = 18$$

$$4a + 10 = 18$$

$$4a = 8$$

$$a = \frac{8}{4} = 2$$

Aplicando o valor encontrado de a em alguma das equações iniciais, encontramos

$$2(2) + b = 10$$

$$b = 10 - 4 = 6$$

Logo, a lei de formação da função é dada por $f(x) = 2x + 6$.

Resolvendo pela equação fundamental da reta, os pontos dados pelo enunciado são $\left(2, f(2)\right) = (2{,}10)$ e $\left(6, f(6)\right) = (6{,}18)$. Vamos encontrar primeiro o coeficiente angular, $a = \frac{18-10}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$. Agora vamos escolher algum dos dois pontos para aplicar na equação fundamental $(y - y_0) = a(x - x_0)$ da reta junto com o coeficiente angular. Escolhendo o ponto $(2{,}10)$, vamos ter

$$(y - 10) = 2(x - 2)$$

$$y - 10 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 4 + 10$$

$$y = 2x + 6$$

Fazendo a mudança de $f(x) = y$, encontramos novamente a função $f(x) = 2x + 6$

Reutilização da atividade introdutória 1

2) Dado o mesmo tanque de 5 mil litros do problema anterior, sendo abastecido pelas duas torneiras com 8 litros por minuto, contendo inicialmente 200 litros. Suponhamos que a bebida presente no tanque vai ser vendida para uma distribuidora a um preço de R$ 4,00 por litro. Sabendo desse novo fato, responda:

c) Qual vai ser a quantia de dinheiro arrecadada com a venda dos 5 mil litros da bebida?

$$x = Quantia\ de\ dinheiro\ arrecadada$$

Chamemos de G, a função que dá o valor arrecadado com a venda a partir da quantidade de litros de bebida no tanque.

$$G(x) = 4x$$

$$G(5000) = 4 * 5000 = 20000$$

d) Escreva uma forma de relacionar a quantidade de dinheiro a ser recebida com a venda da bebida a partir do tempo de produção em minutos.

Conhecendo a função $f(t) = 8t + 200$ que dá a quantidade de bebida abastecida no tanque por minuto passado e a função $G(x) = 4x$ que dá a quantidade recebida com a venda da bebida pela quantidade de bebida. Podemos fazer, $G\big(f(t)\big) = 4(8t + 200) = 32t + 800$.

1)Dadas as funções $f(x) = 5x + 10$, $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 3$ todas com domínio e contradomínio igual ao conjunto dos números reais, determine.

d) fog

e) goh

f) $fohog$

a) $f\big(g(x)\big) = 5(3x + 2) + 10 = 15x + 10 + 10 = 15x + 20$

b) $g\big(h(x)\big) = 3(x - 3) + 2 = 3x - 9 + 2 = 3x - 7$

c) $f\Big(h\big(g(x)\big)\Big) = 5((3x + 2) - 3) + 10 = 5(3x - 1) + 10 = 15x - 5 + 10 = 15x + 5$

2) Uma função afim apresenta os valores $f(4) = 4$ e $f(6) = 16$. Sabendo disso, determine sua lei de formação.

Resolvendo por sistemas, vamos usar a forma da função afim $f(x) = ax + b$. Temos $f(4) = 4a + b = 4$ e $f(6) = 6a + b = 16$. Vamos ter o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 4a + b = 4 & (1) \\ 6a + b = 16 & (2) \end{cases}$$

Escolhendo resolver pelo método da soma, começamos multiplicando por (-1) a equação (2), teremos,

$$\begin{cases} 4a + b = 4 \\ -6a - b = -16 \end{cases}$$

Realizando a soma das duas equações,

$$-6a + 4a + b - b = -16 + 4$$

$$-2a = -12$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por (-1), temos

$$2a = 12$$

$$a = \frac{12}{2} = 6$$

Agora, substituindo o valor encontrado de a em alguma das equações iniciais, encontramos

$$4(6) + b = 4$$

$$24 + b = 4$$

$$b = 4 - 24 = -20$$

Logo, a lei de formação é dada por $f(x) = 6x - 20$.

3) **(UERJ – 2014 adaptada)** O reservatório A com o volume de 720 litros perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. Sabendo que o reservatório B iniciou com 60 litros de água. Determine em quanto tempo ambos terão o mesmo volume de água.

R: Chamando de x a quantidade de horas, podemos fazer as seguintes funções do 1° grau.

$$A(x) = 720 - 10x$$

$$B(x) = 60 + 12x$$

Para encontrar o momento que os dois reservatórios vão ter a mesmo volume de litros de água, basta igualar as duas funções $A(x) = B(x) \leftrightarrow 720 - 10x = 60 + 12x$ que é igual a

$$22x = 660$$

$$x = \frac{660}{22} = 30\ horas$$

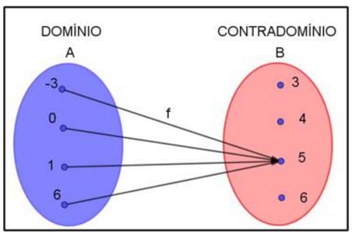
9.2. **Material entregue aos alunos;**

Definição – Função

Dados dois conjuntos A e B, uma função $f: A \rightarrow B$ é uma relação composta por três partes: O conjunto A que será o domínio da função $\left(A = D(f)\right)$; O conjunto B que será o contradomínio da função $\left(B = CD(f)\right)$; E uma regra que permite associar todo elemento x pertencente ao conjunto A, com um único elemento y pertencente ao conjunto B, chamada de Lei de formação. Dentro do Contradomínio existe um subconjunto chamado de Imagem da função $\left(Im(f)\right)$, composto por elementos de B que se relacionaram com algum valor x do domínio.

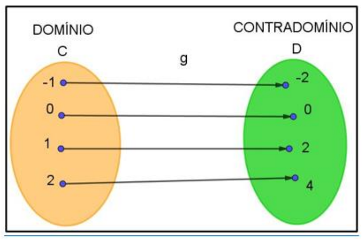
Representação dos que seriam funções

Figura 1: Figura representação de função diagrama de Venn



Fonte 1: Autores (2022)

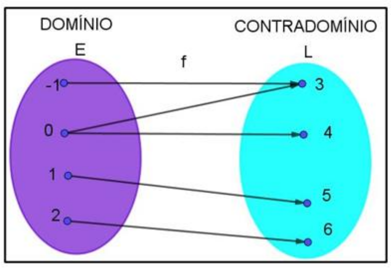
Figura 2: Representação de função.



Fonte 2: Autores (2022).

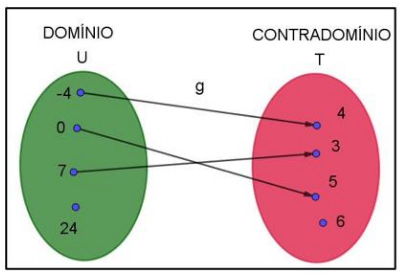
Representação dos que não seriam funções

Figura 3: Representação de não função.



Fonte 3: Autores (2022)

Figura 4: Representação não função.



Fonte 4: Autores (2022)

Função afim ou função polinomial de 1°grau – Uma função f com domínio nos $\mathbb{R}$ e dando resposta também nos $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função afim* quando **todo** elemento do domínio $x \in \mathbb{R}$ se associar a um **único** elemento do contradomínio $(ax + b) \in \mathbb{R}, a \neq 0$, simbolicamente é representada por:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = ax + b \end{aligned}$$

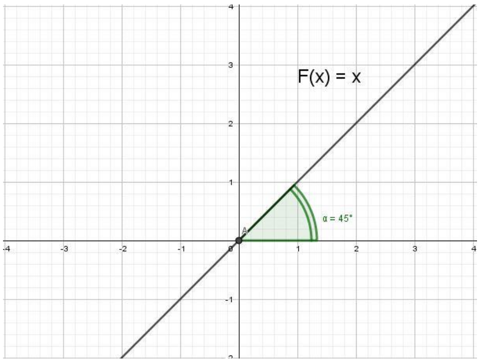
$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ *e é chamado de coeficiente angular do gráfico de f*

$b \in \mathbb{R}$ *e é chamado de coeficiente linear, ou ponto de interseção com o eixo y*

$x = variável\ independente$

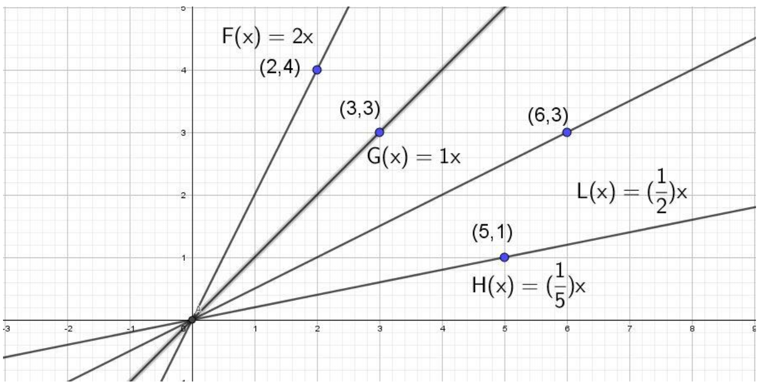
$y = (ax + b) = variável\ dependente$

Identidade: Uma função afim se enquadra como função identidade quando $f(x) = x$, isto é, quando o coeficiente angular é igual a um e o coeficiente linear é igual a zero. Nessa situação, o gráfico é uma reta passa pela origem (0,0), cortando os quadrantes ímpares ao meio.



Fonte: Autores (2022)

Linear: Uma função afim é considerada uma função linear se $f(x) = ax$, sendo o coeficiente angular diferente de zero e o coeficiente linear igual a zero. Nesses casos, a reta passa pela origem (0,0).



Fonte: Autores (2022)

Note que uma função identidade é um caso específico da função linear, quando $a = 1$.

Encontrando a lei de formação da função afim por meio de um sistema

Podemos determinar a lei de formação de uma função afim, conhecendo apenas dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano cartesiano que pertencem a sua reta. Sabendo que a função afim é escrita como $f(x) = ax + b$, aplicamos nessa função os pontos x_1 e $x_2$conhecidos e igualamos a seus respectivos valores de y. Teremos um sistema de duas equações e duas incógnitas $(a\ e\ b)$.

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b = y_1 \\ f(x_2) = ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Encontrando a lei de formação da função afim pela equação fundamental da reta

Toda reta não-vertical possui uma equação que representa todos os seus pontos. Conhecendo dois pontos $A(x, y)$ e $B(x, y)$ pertencentes a essa reta, determinamos o coeficiente angular $a = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$. Essa mesma igualdade pode ser expressa por $(y_1 - y_0) = a(x_1 - x_0)$ que é chamada de **equação fundamental da reta**. Conhecendo dois pontos, encontramos o coeficiente angular e aplicando um deles na equação fundamental da reta, encontramos a lei de formação da função.

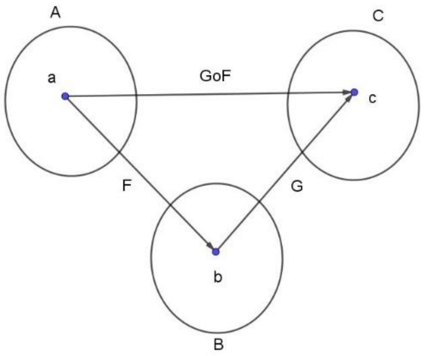
Definição – Função Composta

Seja F uma função de um conjunto A em um conjunto B, ($F: A \to B$), e seja G uma função de um conjunto B em um conjunto C, $(G: B \to C)$. A função composta de G em relação à F é uma função GoF de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

Aplica-se a x a uma função F, obtendo-se $F(x)$.

Aplica-se a $f(x)$ a função G, obtendo-se $G(F(x)) = Gof(x)$

Na função $Gof: A \to C$ o domínio da função G é igual ao contradomínio da função F e $Dom(F) = Dom(GoF)$ e $CDom(G) = CDom(GoF)$. Em alguns casos, o contrário também pode ser feito (FoG), bem como compor duas funções iguais, isto é, FoF ou GoG.



Fonte: Autores (2022)

Atenção.

$Fog(x)$ e $Gof(x)$, na grande maioria das vezes não são iguais.

LISTA DE ATIVIDADES

Atividade introdutória 1 (30 min)

Uma empresa produtora de bebida possui um tanque de 5 mil litros de capacidade que é abastecido por duas torneiras que juntas tem uma vazão de 8 litros por minuto, sabendo que já havia 200 litros no tanque, responda.

a) Quanto tempo levará para enchê-lo completamente?

b) Se essas torneiras fossem abertas as duas horas da tarde, em que horas o tanque estaria totalmente cheio?

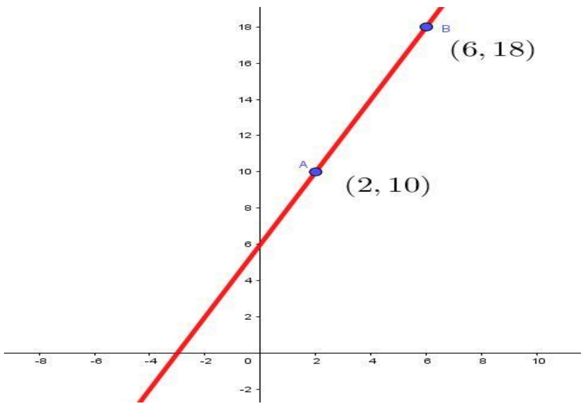
c) Construa o gráfico que representa a quantidade de bebida no tanque.

d) Em que ponto a reta intercepta o eixo “y” e o que esse número representa?

e) Quanto varia a quantidade de bebida no tanque de um minuto para outro?

Exercício (10 min)

O gráfico abaixo é de uma função afim que tem $f(2) = 10$ e $f(6) = 18$. Sabendo disso, determine a lei de formação dessa função.



Fonte: Autores (2022)

Reutilização da atividade introdutória 1 (15 min)

Dado o mesmo tanque de 5 mil litros do problema anterior, sendo abastecido pelas duas torneiras com 8 litros por minuto. Suponhamos que a bebida presente no tanque vai ser vendida para uma distribuidora a um preço de R$4,00 por litro. Sabendo desse novo fato, responda:

e) Qual vai ser a quantia de dinheiro arrecadada com a venda dos 5 mil litros da bebida?
f) Escreva a função que determina a quantia de dinheiro a ser recebida com a venda da bebida a partir do tempo de produção em minutos.

Atividades finais (35 min)

1)Dadas as funções $f(x) = 5x + 10$, $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 3$ todas com domínio e contradomínio igual ao conjunto dos números reais, determine.

g) fog b) goh c)$fohog$

2) Uma função afim apresenta os valores $f(4) = 4$ e $f(6) = 16$. Sabendo disso, determine sua lei de formação.

3)**(UERJ – 2014 adaptada)** O reservatório A com o volume de 720 litros perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. Sabendo que o reservatório B iniciou com 60 litros de água. Determine em quanto tempo ambos terão o mesmo volume de água.

9.3. **Relatório;**

Encontro 5 - 02/04/2022

Relatório 5 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia dois de abril de 2022, sábado, no período da manhã, na sala A103 no bloco das salas de aulas na Unioeste de Cascavel PR, foi realizado o quinto encontro do Promat. Tivemos a participação de 17 alunos, e todos já haviam participado em pelo menos um encontro dos quatro anteriores. As carteiras foram organizadas em grupos de cinco participantes, mas houve alunos que preferiram trabalhar individualmente. Os conteúdos abordados foram: função afim, domínio, contradomínio, imagem, gráfico de funções, e composição de funções.

Começamos a aula perguntando aos alunos se eles já possuíam algum conhecimento sobre função afim. Ninguém quis comentar alguma coisa então prosseguimos com aula, explicando o que era uma função, dizendo que é uma relação entre dois conjuntos, o domínio e o contradomínio, e, essa relação satisfazia duas propriedades, a de que todo elemento do domínio estava relacionado a uma e somente uma imagem no contradomínio. Durante esta explanação eles ficaram passivos, embora alguns confirmassem que haviam entendido, outros aparentavam não ter compreendido coisa alguma. Logo que introduzimos as atividades, eles começaram a pedir ajuda, e trazer suas dúvidas de forma mais particular.

No primeiro problema era pedido para que descobrissem quantos minutos um tanque de capacidade igual a 5000 litros, levaria para ficar cheio. Novamente foi percebido que alguns alunos tiveram problemas na interpretação do enunciado, principalmente em relação as duas torneiras, que era apresentadas duas, porém o problema dava a vazão total, não individual, o que mostra que devemos aperfeiçoar nossa escrita dos enunciados para que fique mais clara e consistente. A maioria teve facilidade em descobrir o tempo necessário para encher o tanque. Após a atividade resolvemos o exercício no quadro, e montamos o gráfico da função, mostrando aos alunos como encontrar equação geral da reta, a partir do gráfico. Passamos então às definições de função afim, função identidade e função linear; essas definições foram entregues de forma impressa, explanadas por nós, e mais uma vez os alunos ficaram passivos, o que mostra que devemos dar mais espaço para os alunos refletirem sobre o tema proposto ao invés de somente ouvirem uma explicação.

Depois do intervalo foram apresentadas a definição da equação fundamental da reta, e a definição de função composta foi enunciada. Após propormos uma modificação do exercício anterior, no qual, o líquido presente no tanque seria vendido pelo valor de quatro reais o litro, queríamos saber uma função que desse o valor do líquido em função da quantidade de litros, que era dada em função do tempo. Auxiliamos os alunos na resolução pois muitos deles tiveram dificuldade para compreender que deveríamos compor as funções para termos o valor do lucro em função do tempo, ainda a maioria dos grupos conseguiram chegar ao resultado, após enunciarmos que será utilizado a função encontrada na atividade anterior, com esta informação a maioria entendeu o que devia fazer, chegando assim no resultado expirado, contudo existiu grupo que conseguiu apenas calcular o valor para um certo tempo específico, foi preciso um pouco de explicação par que pudessem entender que o tempo pode ser a variável, entendendo isso chegaram na função esperada, contudo não teve grupo que citou aquilo ser função composta, conteúdo este que estava sendo introduzido, após a resolução em lousa, apresentamos a definição de composição, usando também exemplos em diagramas, contendo domínio e imagem de cada função e suas composições, onde pudermos perceber que os alunos associaram a concepção com a recente aplicação.

Terminamos a aula com uma lista de atividades; no primeiro ítem dávamos três funções e pedíamos a composição delas, no segundo item dávamos dois pontos de uma função do primeiro grau e pedíamos que encontrassem a lei de formação da função, e no terceiro item adaptamos uma questão de vestibular, na qual se descrevia dois tanques que eram alimentados por torneiras as quais tinham vazão diferente uma da outra e se pedia em que momento os tanques tinham a mesma quantidade de água. Dessa vez menos alunos precisaram de ajuda, a maioria conseguiu resolver os dois primeiros problemas, pediram apenas a confirmação dos resultados. Então resolvemos essas duas questões no quadro, já nos últimos momentos da aula, ficando somente a última questão, que teve sua resolução postada no grupo do Whatsapp da turma.

Nesta aula ficou evidente que os alunos têm interesse pelos temas propostos, mas não se sentem confortáveis para fazer comentários diante de toda a turma, preferindo sempre fazer perguntas após distribuirmos as atividades. Poucos alunos têm confiança o suficiente para fazer perguntas, e essa perguntas tendem a ser de um nível mais elevado, por isso devemos responder às suas questões com moderação pois pode parecer que estamos dando aula apenas para esses alunos. Todos os alunos fizeram as atividades propostas, e tiram dúvidas com algum de nós, em algum momento da aula, exceto dois alunos que ficaram no canto. Quando perguntamos se precisavam de alguma ajuda ou esclarecimento, recusaram e disseram que já tinham terminado as atividades, mas não quiseram nos mostrar. Outro ponto que ficou bem claro é que temos trabalhado da mesma maneira toda aula, e isso tem deixado os alunos meio entediados, tentaremos introduzir mais atividades diferenciadas nos próximos planos de aula, para quebrar essa rotina já estabelecida, e dar mais fluidez aos raciocínios e ideias presentes no conteúdo.

10. **Encontro 6: Plano de aula;**

6º Encontro - 09 de abril de 2022

Encontro remoto e assíncrono.

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Retomada dos conteúdos já abordados **:**Fração, razão, proporção, potenciação, radiciação, conjuntos, polinômios, equações e sistemas de equações do 1° grau, função afim e função composta.

Objetivo geral: Revisar a maioria dos conteúdos apresentados até o momento no Promat.

Objetivos específicos: Por meio dessa aula remota e assíncrona espera-se que os alunos sejam capazes de:

- Relembrar os principais conteúdos apresentados até o momento no Promat;
- Compreender conceitos que não haviam entendido em aula presencial;
- Relembrar exemplos e propriedades fundamentais;

Tempo de execução: Um encontro com duração de 40 minutos.

Recursos didáticos: *Microsoft Power Point, Microsoft Word* e *Google Forms.*

Encaminhamento metodológico:

Esta aula buscará relembrar os pontos mais interessantes do Promat até o momento. Será realizada uma revisão de todos os conteúdos, além de explorar questões de vestibular ou ENEM com a sua resolução, a respeito dos conteúdos propostos. A execução ocorrerá por meio de um vídeo, que será gravado pelos estagiários e disponibilizado aos participantes por meio das redes sociais, *Whatsapp* e *Youtube*.

1º Momento - Revisão do conteúdo de frações e operações:

Por meio de lâminas no *PowerPoint*, vamos explorar, retomando algumas das principais definições e aplicações apresentadas em aula presencial, fazendo uma breve explanação do conteúdo.

DEFINIÇÃO – Frações equivalentes e simplificação de frações.

Frações equivalentes são aquelas escritas de maneiras diferente, mas que expressam o mesmo valor matemático. Elas representam a mesma parte de um todo e para determiná-las é necessário multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero.
Na simplificação de frações, dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero, até chegar em uma fração irredutível, quando não há mais como simplificar.

Juntamente com a definição de frações equivalentes, mostraremos detalhadamente o que nos permite termos a equivalência bem como a simplificação de frações.

DEFINIÇÃO – Operações com frações
Como a fração é um número, podemos realizar as operações básicas da matemática. Podemos somar, subtrair, multiplicar, dividir e futuramente trabalharemos com as operações de potenciação e radiciação de frações. Para realizar essas operações, devemos usar os conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações.

As operações com frações serão apresentadas, de forma breve, enfatizando a ligação que elas possuem em relação ao conceito de equivalência e de simplificação, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão serão abordadas aqui.

DEFINIÇÃO – Porcentagem
Representado pelo símbolo %, como seu próprio nome indica, porcentagem ou por cem, é a divisão de um número qualquer por 100. Ela pode ser representada na forma percentual 12%, forma fracionária $\frac{12}{100}$ e na forma decimal 0,12. Logo, porcentagem é uma razão de denominador 100.
Forma percentual para fracionária
c) $26\% = \frac{26}{100}$ b) $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$
Forma percentual para decimal
c) $14\% = \frac{14}{100} = 0{,}14$ b) $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

A porcentagem será abordada de forma simples, trazendo sua relação com a fração, e enfatizando a sua aplicação facilitada ao se adotar a porcentagem como fração.

2º Momento - Potenciação e radiciação com números reais, conjuntos.

Para a retomada dos conteúdos de potenciação, radiciação e conjuntos numéricos, vamos começar retomando a definição de potenciação e explicando suas propriedades com exemplos.

DEFINIÇÃO – Potenciação ou exponenciação
Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, denominada potência, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e o número n de expoente.

Propriedades da potenciação

a) Exemplo: $2^2 * 2^3 = 2^5$

Multiplicação de potências de bases iguais, mantém-se a base e somam-se os expoentes.

$a^n . a^m = a^{m+n}$

b) Exemplo: $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

Divisão de potências de bases iguais, mantém-se as bases e subtraem-se os expoentes.

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

c) Exemplo: $(2^3)^2 = 2^{3*2} = 2^6$

Na potência de uma potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(a^n)^m = a^{m*n}$

d) Exemplo: $3^2 * 2^2 * 5^2 = (3 * 2 * 5)^2$

Potenciação de quando a base é um produto, multiplicam-se as bases e mantém-se os expoentes.

$a^n * b^n * c^n = (a * b * c)^n$

e) Exemplo: $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Potenciação de quando a base é um quociente, dividem-se as bases e mantém-se os expoentes.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$com b diferente de zero.

f) Exemplo: $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \; ou \; \left(\frac{2}{1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Potenciação de expoente negativo, invertemos sua base e também o sinal do expoente.

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, de outra forma $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

DEFINIÇÃO – Radiciação

Enquanto a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número racional diferente de zero, chamado de índice e b que é a raiz.

$$\sqrt[n]{y} = \underbrace{\sqrt[n]{x * x * \; x * x * \ldots * x}}_{n \; vezes} = x$$

$$\text{Pois } y = x^n$$

Dizemos que a raiz é exata quando o resultado é um número inteiro e não exata se for um número irracional. O método mais comum para calcular as raízes é através da fatoração numérica do radicando em números primos.

Propriedades da radiciação

Exemplo: $\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} \; = \; 2$

f) A raiz de um número que está elevado a um expoente igual ao índice, é igual a esse próprio número.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplo: $\sqrt[4]{81 * 16} = \sqrt[4]{81} * \sqrt[4]{16}$

g) No produto de raízes de mesmo índice, multiplicam-se os radicandos dentro da raiz.

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

Exemplo: $\sqrt[2]{\frac{9}{32}} = \frac{\sqrt[2]{9}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2}$

h) Na divisão de raízes de mesmo índice, dividem-se os radicandos dentro da raiz.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo: $\sqrt[10]{2^{10}} = \sqrt[\frac{10}{5}]{2^{\frac{10}{5}}} = \sqrt[2]{2^2}$ = 2

i) Na raiz da raiz, basta multiplicarmos os índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$$

Exemplo: $\left(\sqrt[2]{16}\right)^2 = \sqrt[2]{16^2} = 16$

j) Na potência de uma raiz, elevamos o radicando pelo expoente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Definição

A raiz enésima pode ser transformada em uma potência com expoente racional. O índice da raiz corresponde ao denominador, e o expoente do radicando corresponde ao numerador.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Em seguida, seguiremos com o conteúdo de conjuntos, relembrando seus tipos e as relações de pertinência e de ordem com alguns exemplos.

Conjunto vazio: Conjunto sem nenhum elemento, representado por $A = \{\ \}$ ou ∅

Conjuntos unitários: Conjunto com um único elemento, exemplo, $D = \{1\}$.

Conjuntos ordenados: Conjunto onde a ordem dos elementos importa, exemplo par ordenado do plano cartesiano $A = (1,2)$, trio ordenado $B = (1,2,3)$.

Conjuntos finitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplo $A = \{\, 2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{Meses\ do\ ano\}$ $C = \{\,Vogais\ no\ alfabeto\}$

Conjuntos infinitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots ,100, \dots\}$, $\mathbb{R} = \{\dots , -1, \dots , -0{,}5, \dots ,1, \dots , \pi, \dots , 27, \dots\}$

Relação de pertinência:

$$2 \in \{1,2,3,4\}$$

$$5 \notin \{1,2,3,4\}$$

Relação de inclusão:

$$\{\} \subset \{1,2,3,4\}$$

$$\{1\} \subset \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4\}$$

3º Momento - Polinômios, produtos notáveis e fatoração.

Para o terceiro momento, vamos começar relembrando as definições de monômios, binômios, trinômios, polinômios, sobre seus graus e seus valores numéricos. Usaremos exemplos nas lâminas para explicar cada caso.

Definição Monômio: Um monômio, ou um termo algébrico é toda expressão algébrica da forma ax^n , sendo a um número real, x uma variável e n um número natural. Um monômio é dividido em duas partes, o número que é chamado de coeficiente numérico e a variável ou o produto de variáveis chamados parte literal. Divisões por variáveis e, variáveis com expoente fracionário ou negativo, não são considerados monômios.

Definição de polinômios: Uma função polinomial ou simplesmente polinômio, tem como forma geral $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Cada termo é um monômio separado por uma operação de soma ou subtração. Polinômios com apenas dois termos são chamados de binômios e polinômios com três termos são chamados de trinômios.

Exemplos:

e) $P(x) = 81$

f) $P(x) = 64x^2 + 8x$

g) $P(x) = 21x^2 + x + 2$

h) $P(x) = x^4 - 23x^3 + 12x^2 - x + 2$

Em seguida, relembraremos dos produtos notáveis estudados em sala, usaremos exemplos para cada caso, comentando sobre a formas fatorada e expandida algebricamente.

Produtos notáveis: São expressões algébricas que aparecem com muita frequência no cálculo algébrico. São utilizados no processo de fatoração de polinômios e no processo de simplificação deles. Os cinco produtos notáveis mais relevantes são: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença. **Quadrado da soma**: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x+a)(x+a) = (x+a)^2$. O nome *quadrado da soma* é dado porque a representação por potência desse produto é $(x+a)^2$. Sua expressão algébrica seria $(x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$. **Quadrado da diferença**: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x-a)(x-a) = (x-a)^2$. Sua única diferença com o *quadrado da soma* é o sinal negativo no termo central. Sua expressão algébrica seria $(x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$. **Produto da soma pela diferença**: É o produto notável que envolve um fator binomial com uma soma e outro com uma subtração, $(x+a)(x-a)$. Sua expressão algébrica seria $x^2 - a^2$.

4º Momento- Equações e sistemas de equações do primeiro grau

Para o quarto momento, vamos comentar brevemente sobre a definição de equações do primeiro grau, relembrando do tipo de solução para equações com uma ou mais incógnitas.

Equação do 1° grau: Uma equação do 1°grau (linear), é um tipo de equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, sendo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ coeficientes reais, as incógnitas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ e c o termo independente. Além disso, o polinômio que forma as expressões tem grau um.
Exemplos de equações do 1° grau.

d) $2x - 1 = 3$	$S: \{2\}$
e) $4x + y = 9$	Assumindo, por exemplo, $x = 2$, nossa solução é $S: \{(2,1)\}$
f) $x + y + 2z = 2$	Assumindo, por exemplo, $x = -2$ e $y = 0$, nossa solução é $S: \{(-2,0,2)\}$

Em seguida, usaremos o exemplo abaixo de sistema de equações do primeiro grau com duas equações e duas incógnitas para rever apenas o método da substituição.

Por último, mostraremos como resolver um sistema de três equações e três incógnitas, tendo que primeiro isolar uma das três incógnitas para trabalharmos com um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por duas equações do 1° grau do tipo $ax + by = c$, com duas incógnitas, x e y. As retas dessas equações quando são concorrentes, apresentam um único par de coordenadas (x, y) que satisfaz ambas as equações, ou seja, é um ponto que pertence as duas retas, representadas pelas duas equações.

Dizemos que a solução do sistema formado por duas equações do 1° grau é o conjunto $S: \{(x, y)\}$.

Exemplo

$$\begin{cases} 5x - 6y = 5 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \qquad S: \{(13,10)\}$$

Método da substituição: Esse método consiste em isolar uma incógnita de alguma das equações e substitui-la nas outras equações.

Sistema de equações do 1° grau com três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Esse é um sistema formado por três equações do 1° grau do tipo $ax + by + cz = d$, com três incógnitas, x, y e z. Para resolver esses sistemas, procuramos isolar uma incógnita de alguma equação e a substituímos nas outras, de modo a trabalhar com um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Dizemos que a solução do sistema formado por três equações do 1° grau é o conjunto $S\colon\{(x, y, z)\}$.

Exemplo a ser usado no slide

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \quad (1) \\ x - 2y + z = 5 \quad\ \ (2) \\ 5x - y + 3z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Escolhendo isolar a incógnita x da equação (1), vamos ter $x = 10 - 2y + z$. Substituindo nas incógnitas x nas equações (2) e (3), obtemos:

$$\begin{cases} (10 - 2y + z) - 2y + z = 5 \\ 5(10 - 2y + z) - y + 3z = 0 \end{cases} => \begin{cases} -4y + 2z = -5 \\ -11y + 8z = -50 \end{cases}$$

5º Momento- Função afim função composta funções com múltiplas sentenças

Função afim ou função polinomial de 1°grau – Uma função f com domínio nos $\mathbb{R}$ e dando resposta também nos $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função afim* quando **todo** elemento do domínio $x \in \mathbb{R}$ se associar a um **único** elemento do contradomínio $(ax + b) \in \mathbb{R}, a \neq 0$, simbolicamente é representada por:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = ax + b \end{aligned}$$

$a \in \mathbb{R}, a \neq 0\ e\ é\ chamado\ de\ coeficiente\ angular\ do\ gráfico\ de\ f$

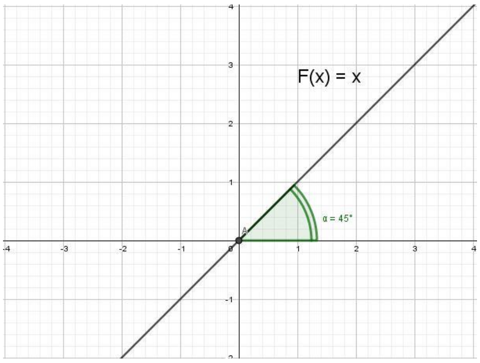
$b \in \mathbb{R}\ e\ é\ chamado\ de\ coeficiente\ linear\ ou\ ponto\ de\ interseção\ com\ o\ eixo\ y$

$x = variável\ independente$

$y = (ax + b) = variável\ dependente$

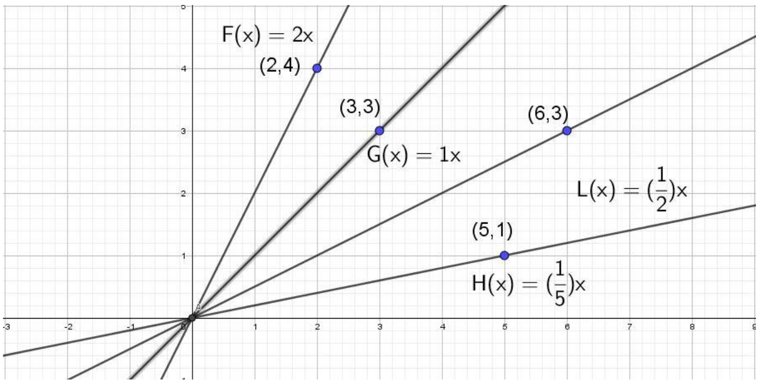
Identidade: Uma função afim se enquadra como função identidade quando $f(x) = x$, isto é, quando o coeficiente angular é igual a um e o coeficiente linear é igual a zero.

Nessa situação, o gráfico é uma reta passa pela origem (0,0), cortando os quadrantes ímpares ao meio.



Fonte: Autores (2022)

Linear: Uma função afim é considerada uma função linear se $f(x) = ax$, sendo o coeficiente angular diferente de zero e o coeficiente linear igual a zero. Nesses casos, a reta passa pela origem (0,0).



Fonte: Autores (2022)

Note que uma função identidade é um caso particular ou específico da função linear, quando $a = 1$.

Definição – Função Composta

Seja F uma função de um conjunto A em um conjunto B, $(F: A \to B)$, e seja G uma função de um conjunto B em um conjunto C, $(G: B \to C)$. A função composta de G em relação à F é uma função GoF de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

Aplica-se a x a uma função F, obtendo-se $F(x)$.

Aplica-se a $f(x)$ a função G, obtendo-se $G\big(F(x)\big) = Gof(x)$

Na função $Gof: A \rightarrow C$ o domínio da função G é igual ao contradomínio da função F e $Dom(F) = Dom(GoF)$ e $CDom(G) = CDom(GoF)$. Em alguns casos, o contrário também pode ser feito (FoG), bem como compor duas funções iguais, isto é, FoF ou GoG.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá por meio de um formulário online, apresentando o resultado no momento da resolução. Esse formulário é composto por sete perguntas relacionadas aos conteúdos revisados até o momento. Decidimos colocar uma pontuação para cada pergunta e em caso de a resposta estar errada, vai ser mostrado a resolução correta através de um *feedback.* Esperamos que os alunos façam essas atividades como uma autoavaliação.

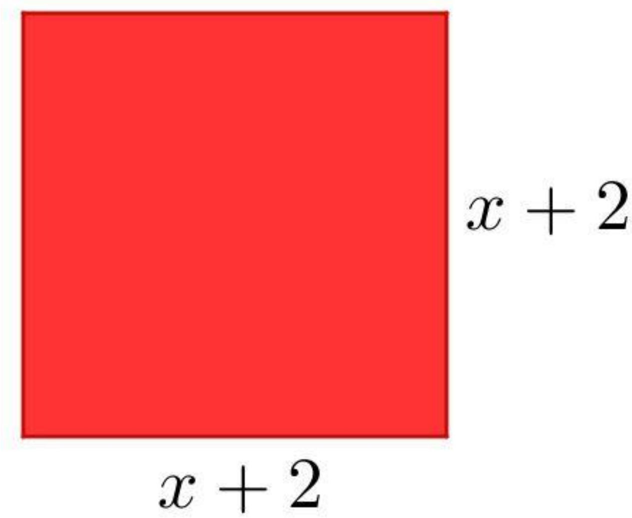
Referências:

ASTH, Rafael. Exercícios de frações**. Toda matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-fracoes/. Acesso em: 05 de abr. 2022.

Anexo:

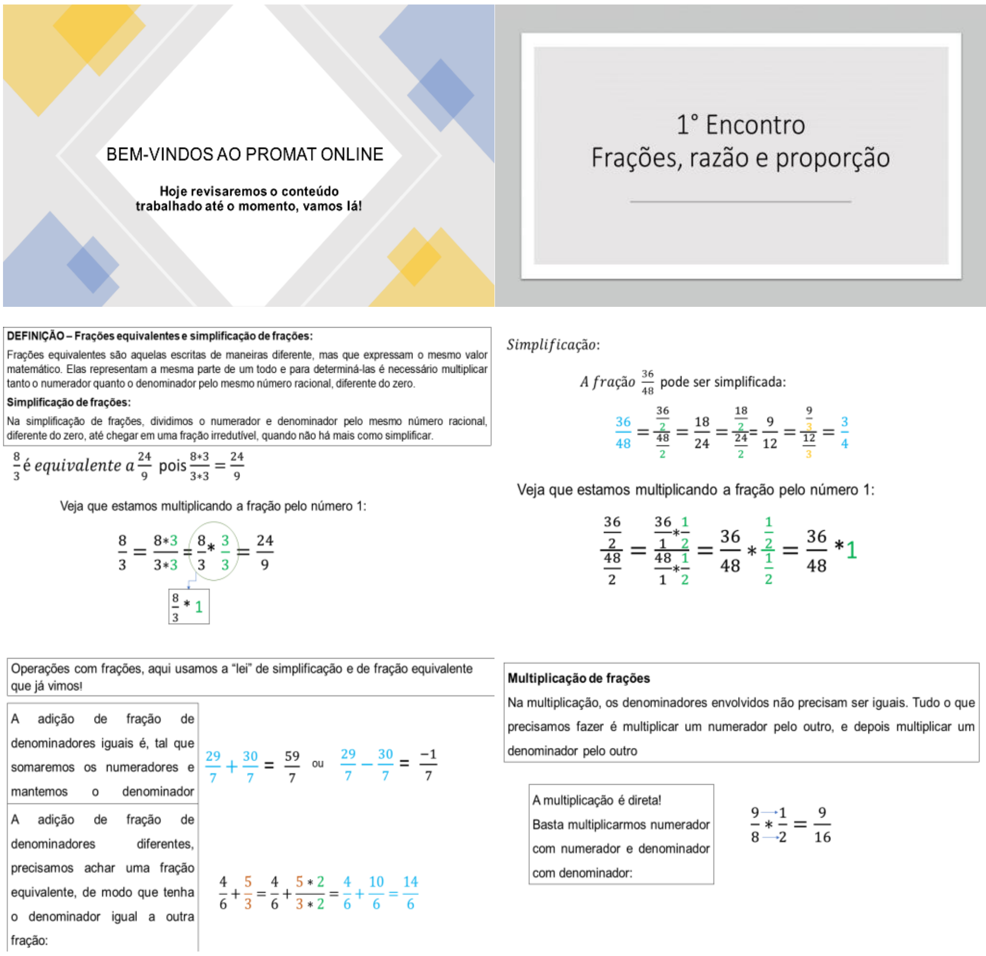
Apêndices:

A)



$x + 2$
$x + 2$

B)



BEM-VINDOS AO PROMAT ONLINE
Hoje revisaremos o conteúdo trabalhado até o momento, vamos lá!
1° Encontro
Frações, razão e proporção
DEFINIÇÃO – Frações equivalentes e simplificação de frações:
Frações equivalentes são aquelas escritas de maneiras diferente, mas que expressam o mesmo valor matemático. Elas representam a mesma parte de um todo e para determiná-las é necessário multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero.
Simplificação de frações:
Na simplificação de frações, dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número racional, diferente do zero, até chegar em uma fração irredutível, quando não há mais como simplificar.
$\frac{8}{3}$ é equivalente a $\frac{24}{9}$ pois $\frac{8*3}{3*3} = \frac{24}{9}$
Veja que estamos multiplicando a fração pelo número 1:
$\frac{8}{3} = \frac{8*3}{3*3} = \frac{8}{3}*\frac{3}{3} = \frac{24}{9}$
$\frac{8}{3}*1$
Simplificação:
A fração $\frac{36}{48}$ pode ser simplificada:
$\frac{36}{48} = \frac{\frac{36}{2}}{\frac{48}{2}} = \frac{18}{24} = \frac{\frac{18}{2}}{\frac{24}{2}} = \frac{9}{12} = \frac{\frac{9}{3}}{\frac{12}{3}} = \frac{3}{4}$
Veja que estamos multiplicando a fração pelo número 1:
$\frac{\frac{36}{2}}{\frac{48}{2}} = \frac{\frac{36}{1}*\frac{1}{2}}{\frac{48}{1}*\frac{1}{2}} = \frac{36}{48}*\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{36}{48}*1$
Operações com frações, aqui usamos a "lei" de simplificação e de fração equivalente que já vimos!
A adição de fração de denominadores iguais é, tal que somaremos os numeradores e mantemos o denominador
$\frac{29}{7} + \frac{30}{7} = \frac{59}{7}$ ou $\frac{29}{7} - \frac{30}{7} = \frac{-1}{7}$
A adição de fração de denominadores diferentes, precisamos achar uma fração equivalente, de modo que tenha o denominador igual a outra fração:
$\frac{4}{6} + \frac{5}{3} = \frac{4}{6} + \frac{5*2}{3*2} = \frac{4}{6} + \frac{10}{6} = \frac{14}{6}$
Multiplicação de frações
Na multiplicação, os denominadores envolvidos não precisam ser iguais. Tudo o que precisamos fazer é multiplicar um numerador pelo outro, e depois multiplicar um denominador pelo outro
A multiplicação é direta! Basta multiplicarmos numerador com numerador e denominador com denominador:
$\frac{9}{8}*\frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

Divisão de frações

A divisão é realizada por meio da troca de frações que podem ser divididas, mudando de posição o numerador pelo denominador e fazendo a multiplicação dos novos objetos da operação com frações.

Veja:

$$\frac{1}{2} * \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} * \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{5}{3} * \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{10}}{1} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = 1$$

$$\frac{5}{3} * \frac{3}{5} = \frac{3}{3} * \frac{5}{5} = 1 * 1 = 1$$

Assim podemos fazer diretamente:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

DEFINIÇÃO – Porcentagem

Representado pelo símbolo %, como seu próprio nome indica, porcentagem ou por cem, é a divisão de um número qualquer por 100. Ela pode ser representada na forma percentual; por exemplo, 12%, na forma fracionária $\frac{12}{100}$ e na forma decimal 0,12. Logo, porcentagem é uma razão de denominador 100.

Forma percentual para fracionária

a) $26\% = \frac{26}{100}$ b) $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Forma percentual para decimal

a) $14\% = \frac{14}{100} = 0{,}14$ b) $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

(10% de 100) = $\frac{10}{100} * 100 = 10$

(50% de 100) = $\frac{50}{100} * 100 = 50$

(40% de 300) = $\frac{40}{100} * 300 = 120$

2° Encontro
Potenciação e radiciação com números reais e conjuntos

DEFINIÇÃO – Potenciação ou exponenciação

Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, denominada potência, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e o número n de expoente.

$$\underset{\text{Base}}{a}^{\overset{\text{expoente}}{n}} = \underbrace{a\,.\,a.\,a.\,a.\;\dots\,.\,a}_{\text{n fatores}}$$

$$2^2 * 2^3 = 2^5$$

$$a^n . a^m = a^{m+n}$$

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(2^3)^2 = 2^{3*2} = 2^6$$

$$(a^n)^m = a^{m*n}$$

$$3^2 * 2^2 * 5^2 = (3 * 2 * 5)^2$$

$$a^n * b^n * c^n = (a * b * c)^n$$

$$\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ com b diferente de zero

$$2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \ ou\ \left(\frac{2}{1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

DEFINIÇÃO – Radiciação

Enquanto a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número racional diferente de zero, chamado de índice e b que é a raiz.

$$\sqrt[n]{y} = \underbrace{\sqrt[n]{x * x * x * x * \cdots * x}}_{n\ vezes} = x$$

Pois $y = x^n$

Dizemos que a raiz é exata quando o resultado é um número inteiro e não exata se for um número irracional. O método mais comum para calcular as raízes é pela fatoração numérica do radicando em números primos.

Definição

A raiz enésima pode ser transformada em uma potência com expoente racional. O índice da raiz corresponde ao denominador, e o expoente do radicando corresponde ao numerador.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = 2$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[4]{81 * 16} = \sqrt[4]{81} * \sqrt[4]{16}$$

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[2]{\frac{9}{32}} = \frac{\sqrt[2]{9}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2*4]{256} = \sqrt[8]{256} = 2$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$$

$$\left(\sqrt[2]{16}\right)^2 = \sqrt[2]{16^2} = 16$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Tipos de conjuntos

Conjunto vazio: Conjunto sem nenhum elemento, representado por $A = \{\,\}$ ou ∅

Conjuntos unitários: Conjunto com um único elemento, exemplo, $D = \{1\}$.

Conjuntos ordenados: Conjunto onde a ordem dos elementos importa, exemplo o conjunto $A = \{1,2,3,4, \dots .\}$, ter ordem do tipo $a < b$.

Conjuntos finitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplo $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{Meses\ do\ ano\}$ $C = \{Vogais\ no\ alfabeto\}$

Conjuntos infinitos: São conjuntos que apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots, 100, \dots\}$, $\mathbb{R} = \{\dots, -1, \dots, -0{,}5, \dots, 1, \dots, \pi, \dots, 27, \dots\}$

Relação de pertinência

$$2 \in \{1,2,3,4\}$$

$$5 \notin \{1,2,3,4\}$$

Relação de inclusão

$$\{\} \subset \{1,2,3,4\}$$

$$\{1\} \subset \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4\}$$

3° Encontro
POLINÔMIOS, PRODUTOS NOTÁVEIS

Definição Monômio: Um monômio, ou um termo algébrico é toda expressão algébrica da forma ax^n , sendo a um número real, x uma variável e n um número natural. Um monômio é dividido em duas partes, o número que é chamado de coeficiente numérico e a variável ou o produto de variáveis chamados parte literal. Divisões por variáveis e, variáveis com expoente fracionário ou negativo, não são considerados monômios.

Binômios:
$4xy + 2y$
$4x + 19$
$x^3y + 1$

Trinômios:
$xz + 9y + 3$
$5x^2 + x + 19$
$x^2 + 6y + 1$

Não monômios:
$\frac{3x}{y}$;
$15x^{-1}$;
$x^{\frac{2}{3}}$

Coeficiente numérico **Expoente**
Sinal $-2x^4$
Parte literal

Definição de polinômios: Uma função polinomial ou simplesmente polinômio, tem como forma geral

$$P(x) = \underbrace{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}_{n\ termos}.$$

Cada termo é um monômio separado por uma operação de soma ou subtração. Polinômios com apenas dois termos são chamados de binômios e polinômios com três termos são chamados de trinômios.

Exemplos:

a) $P(x) = 81$
b) $P(x) = 64x^2 + 8x$
c) $P(x) = 21x^2 + x + 2$
d) $P(x) = x^4 - 23x^3 + 12x^2 - x + 2$

Produtos notáveis

Quadrado da soma: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$. O nome *quadrado da soma* é dado porque a representação por potência desse produto é $(x + a)^2$.

Exemplo

a) $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 * 3x + 9$

Quadrado da diferença: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x - a)^2 = (x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$.

Exemplo

a) $(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 * 2x + 2^2$

Produto da soma pela diferença: É o produto notável que envolve um fator binomial com uma soma e outro com uma subtração, resultando em

$(x + a)(x - a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$.

Exemplo

a) $(x + 5)(x - 5) = x^2 + 5x - 5x - 25 = x^2 - 25$

4° Encontro
Equações e sistemas de equações do 1° grau

Equação do 1° grau: Uma equação do 1°grau (linear), é um tipo de equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, sendo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ coeficientes reais, as incógnitas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ e c o termo independente. Além disso, o polinômio que forma as expressões tem grau um.

Exemplos de equações do 1° grau.

a)
$$\begin{gathered} 2x - 1 = 3 \\ 2x = 3 + 1 \\ 2x = 4 \\ x = \frac{4}{2} = 2 \\ S: \{2\} \end{gathered}$$

b)
$$\begin{gathered} 4x + y = 9 \\ Assumindo, x = 2 \\ 4(2) + y = 9 \\ y = 9 - 8 \\ y = 1 \\ S: \{(2,1)\} \end{gathered}$$

c)
$$\begin{gathered} x + y + 2z = 2 \\ Assumindo, x = -2\ e\ y = 0 \\ -2 + 0 + 2z = 2 \\ 2z = 2 + 2 \\ z = \frac{4}{2} = 2 \\ S: \{(-2,0,2)\} \end{gathered}$$

Sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas

Exemplo

$$\begin{cases} 5x - 6y = 5 & (1) \\ -x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$$

Método da substituição: Esse método consiste em isolar uma incógnita de uma das equações e substituí-la nas outras equações.

1° Escolhendo isolar o x na equação (2), vamos obter $x = -7 + 2y$.

2° Vamos substituir o valor de x na equação (1), ficando

$$\begin{gathered} 5(-7 + 2y) - 6y = 5 \\ -35 + 10y - 6y = 5 \\ 4y = 5 + 35 \\ 4y = 40 \\ y = \frac{40}{4} = 10 \end{gathered}$$

3° Substituímos o valor de y encontrado na equação do primeiro passo.

$$\begin{gathered} x = -7 + 2(10) \\ x = -7 + 20 \\ x = 13 \end{gathered}$$

$S: \{(13,10)\}$

Sistema de equações do 1° grau com três equações e três incógnitas

Exemplo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 & (1) \\ x + 3y + z = 7 & (2) \\ 5x + 2y + 3z = 2 & (3) \end{cases}$$

1° Vamos escolher isolar a incógnita x da equação (1).
$x = 10 - 2y + z$

2° Substituindo o valor de x nas equações (2) e (3), desse modo vamos obter um sistema com duas equações do 1° grau com duas incógnitas que sabemos resolver.

$$\begin{cases} (10 - 2y + z) + 3y + z = 7 \\ 5(10 - 2y + z) + 2y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2z = -3 \\ -8y + 8z = -48 \end{cases} \Rightarrow y = 3\ e\ z = -3$$

3° Substituindo os valores de y e z na equação do primeiro passo.

$$\begin{gathered} x = 10 - 2(3) + (-3) \\ x = 1 \end{gathered}$$

$S: \{(1, 3, -3)\}$

5° Encontro
Função afim e função composta

10.1. **Relatório;**

Encontro 6 - 09/04/2022

Relatório 6 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia dois de abril de 2022, sábado, devido ao recesso acadêmico, o encontro teve que ser realizado de maneira diferente da convencional. Foi preparado um vídeo e publicado no *YouTube* no dia nove de abril de 2022*,* o objetivo do vídeo foi fazer uma revisão dos conteúdos trabalhados até o momento, sendo eles: frações, razão, proporção, radiciação, potenciação, conjuntos, polinômios, produtos notáveis, equações e sistemas de equações do primeiro grau, função do primeiro grau e função composta. Além do vídeo preparamos um questionário via *Google Forms,* com algumas questões sobre os conteúdos falados no vídeo.

Esse formulário foi a forma encontrada para verificar o nível de aprendizado da sala até o momento, para os alunos marcarem presença e para eles se autoavaliarem. O formulário tem sete questões de múltipla escolha, colocamos um sistema de pontos para cada questão, sendo de cinco pontos para as seis primeiras questões e dez pontos para a última questão. Ao enviar o formulário, o aluno poderia conferir o resultado da sua pontuação e olhar as olhar a resposta das alternativas que havia errado.

No total quatorze pessoas responderam o formulário e marcaram presença, desses tivemos três pessoas que apenas mandaram o *e-mail* para marcar presença*,* não querendo responder as questões no formulário, uma vez que elas não eram obrigadas. Dos onze que responderam, alguns refizeram o formulário mais de uma vez, então não iremos contar esses outros envios.

Coletamos então, as seguintes pontuações: Quatro alunos que tiraram 40 pontos; Três alunos que tiraram 35 pontos; um aluno que tirou 30 pontos; Um aluno que tirou 25 pontos; Dois que tiraram 15 pontos e três que não pontuaram.

Tivemos uma mediana de 32,5 pontos e uma média de 25 pontos, um pouco acima da metade dos 40 pontos totais. Tirando aqueles que completaram corretamente o formulário, boa parte dos discente acertaram entre quatro e seis questões das sete que havia, mostrando um aprendizado sobre os conteúdos vistos.

Aqueles que tiraram 15 pontos, acertaram entre duas e três questões, apresentando uma possível dificuldade sobre alguns conteúdos, um desses dois procurou reenviar o formulário mais de uma vez, buscando entender com as respostas onde havia errado.

O vídeo deste encontro foi o principal desafio para grupo, sua criação foi separada em três partes com cada estagiário ficando encarregado de apresentar uma. Cada uma das três partes é composta por conteúdos que julgamos serem os mais importantes ou que observamos mais dificuldades por parte dos alunos.

Foi utilizado os *softwares OBS Studio* e *OpenShot*[2] para gravação e edição dos três vídeos, facilitando o processo, o tempo do vídeo final ficou programado para 30 minutos, mas com as variações das três partes o vídeo final ficou com 39 minutos e 36 segundos.

A gravação foi o momento de maior desafio, levando em consideração o tempo separado entre nós três de 10 minutos, não podendo ultrapassar muito esse período e ainda revisar os conteúdos escolhidos. O tempo de duração do vídeo se tornou uma meta para cada um, sendo necessário gravar outras versões por conta de detalhes como a pronúncia errada de palavras, equívocos na definição dos conceitos e até mesmo interrupções externas devido a cada um gravar em sua casa, porém em algumas tentativas obtivemos um resultado satisfatório.

A apresentação do link do referido vídeo foi publicada no grupo do *WhatsApp* assim como o formulário, tivemos ao todo 24 visualizações, sendo que quatro delas não foram dos alunos, assim estimamos que pelo menos 20 alunos visualizaram o vídeo. Consideramos que o formulário funcionou como esperávamos, mas que alguns alunos não se interessaram em assistir o vídeo e resolver o formulário, acreditamos que isso ocorreu devido ao fato de ser apresentado online e do formulário não ser de obrigatória resolução.

[2] OpenShot: Software de edição de vídeos gratuito, criado em 2008 pela empresa OpenShot Studios, disponível para Linux e Windows.

11. **Encontro 7: Plano de aula;**

7º Encontro – 23 de abril de 2022

Público-Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Função quadrática, resolução da equação do segundo grau.

Objetivo geral: Revisar os conceitos de função e equação quadrática, compreender e utilizar suas propriedades, seus métodos de resolução, seus pontos notáveis e seus gráficos. Além disso, aprender a resolver e aplicar essas definições e métodos em diversos problemas.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes, ao final dessa aula, de:

- Compreender a definição de função quadrática, suas componentes e analisando seus gráficos.
- Compreender e métodos de resolução de equações quadráticas.
- Realizar aplicações de funções e equações nos mais diversos problemas.
- Identificar e calcular o ponto de vértice da parábola e a classificá-lo como ponto de máximo ou mínimo da função quadrática.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, Projetor, *Power Point*, Folhas Sulfites.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que os alunos adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Nessa aula, procuraremos negociar a não utilização da calculadora, com o objetivo de estimular o cálculo mental e o uso de estratégias que facilitem e agilizem os cálculos. Isso se deve ao ENEM e outros vestibulares não permitirem o uso da calculadora.

Utilizaremos o projetor no decorrer da aula para deixá-la mais dinâmica, apresentando os conteúdos em lâminas previamente preparadas. A resolução de tarefas ou anotações de exemplos será feita no quadro.

Os alunos serão organizados em grupos de três ou quatro elementos, facilitando o atendimento às dúvidas. Será entregue, após o segundo momento a primeira lista, frente e verso, contendo todos os problemas para essa aula. A última lista, também frente e verso, terá o resumo do conteúdo e será entregue antes do nono momento.

1º Momento: Perguntas sobre as funções e equações do 2° grau (20 min)

Faremos uma série de questionamentos aos discente para introduzi-los ao estudo de funções e equações do segundo grau, bem como relembrá-los de assuntos básicos sobre esse conteúdo.

Questionamentos

1) O que é uma função quadrática ou função polinomial do segundo grau?

   Acreditamos que os alunos responderão com frases como: É uma parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo, tem formato de $f(x) = ax^2 + bx + c$, possui um vértice, um eixo de simetria, entre outros.

2) O que diferencia uma função quadrática de uma equação quadrática?

Acreditamos que eles responderão como: Uma função quadrática é usada para determinar o valor da função para um determinado valor x, enquanto na equação quadrática buscamos encontrar os dois valores que x pode assumir para satisfazer a sentença. Na função quadrática resolvemos apenas aplicando a função num ponto x, enquanto na equação usamos uma fórmula de resolução.

3) Vocês conseguem pensar em alguma utilidade para a função ou a equação do segundo grau?

   Esperamos que os alunos falem de aplicar equações do segundo grau na engenharia com o estudo de áreas e volumes de sólidos, na matemática financeira no cálculo de juros composto, entre outros.

Em seguida, nós apresentaremos algumas utilidades cotidianas da função e equação do segundo grau.

Movimento de um projétil: Ao arremessarmos um objeto como uma pedra em um lago, notamos que a trajetória da pedra é uma parábola, logo, uma função do 2° grau pode descrever esse movimento.

Na Física, ela possui um papel importante na análise dos movimentos uniformemente variados (MUV), porque em razão da aceleração, os corpos variam de velocidade e o espaço em função do tempo. Para relacionar o espaço de deslocamento em função do tempo, usa-se a expressão $S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$ onde $a = aceleração, S = espaço, V = velocidade\ e\ t = tempo.$

No cálculo do seu Índice de Massa Corpórea – IMC, é dado pela equação $h^2(IMC) - m = 0$, onde $h = altura$ e $m = massa$.

2º Momento: Atividade introdutória de funções quadráticas (20 min)

Essa atividade foi escolhida por ser resolvida apenas conhecendo a forma de se aplicar uma função, com um conhecimento básico sobre o assunto. Com essa questão poderemos observar o nível de dificuldade dos alunos com a aplicação de uma função quadrática. Algumas perguntas que poderiam ser feitas sobre essa questão seria “O que representa o valor de x e o valor de y?”, “De que modo aplicamos uma função?”.

Atividade introdutória 1

(ENEM 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota **zero** permanece **zero**.
- A nota **10** permanece **10**.
- A nota **5** passa a ser **6**.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

Após o tempo de 10 minutos, será perguntado se algum aluno gostaria de apresentar sua resolução no quadro. Caso ninguém se ofereça, perguntaríamos se alguém apresentaria a resolução oralmente. Um tempo de 10 minutos será dado para a resolução no quadro**.**

3º Momento: Definição da função quadrática e o estudo sobre sua concavidade e raízes. (40 min)

Definição – Função quadrática ou função polinomial do 2° grau

Uma função f de domínio o $\mathbb{R}$ e contradomínio também o $\mathbb{R}$, ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do 2° grau quando **todo** elemento do domínio $x \in \mathbb{R}$ se associar a um **único** elemento do contradomínio $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Simbolicamente, isto é,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$a = coeficiente\ angular\ do\ gráfico\ de\ f, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

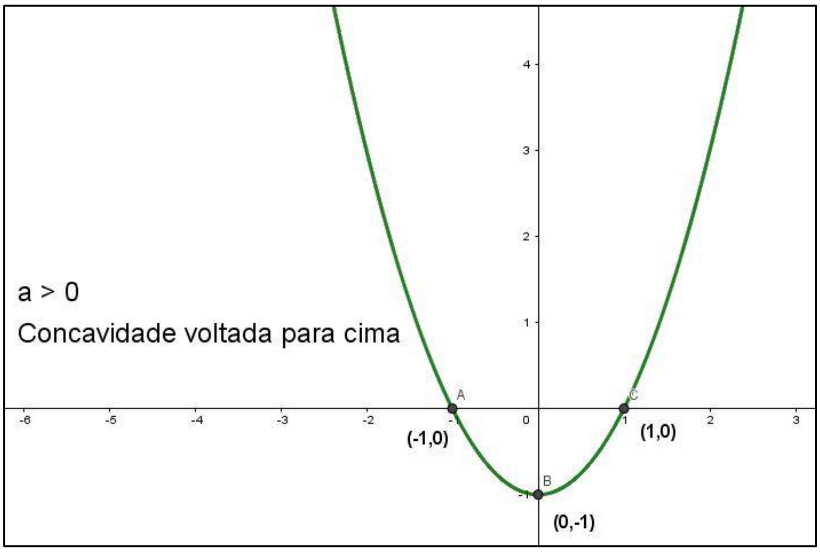
$b = coeficiente\ linear, b \in \mathbb{R}$

$c = termo\ independente, ponto\ do\ eixo\ y\ que\ faz\ interseção\ com\ o\ gráfico\ f, c \in \mathbb{R}$

Geometricamente, seu gráfico é o de uma parábola.

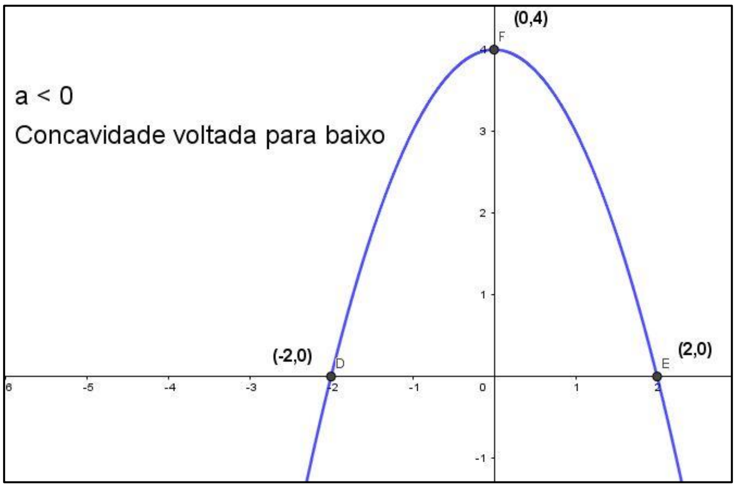
Nesse momento, vamos escrever no quadro as seguintes funções quadráticas, $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + 4$. Com duas tabelas de valores, convidaremos alguns alunos para preenchê-las no quadro e dispor os valores nos planos cartesianos. Se ninguém se oferecer para ir ao quadro, pediremos que deem o valor para cada x, depois construiremos cada gráfico. Com esses dois gráficos, vamos introduzir o estudo da concavidade.

Figura 22: Ilustração função quadrática



Fonte: Autores (2022).

Figura 23: Ilustração função quadrática concavidade para baixo



Fonte: Autores (2022).

Definição – Concavidade

A parábola representativa da função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para “cima” ou voltada para “baixo”. Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para “cima. Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Zero de uma função quadrática

Os zeros de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores de x para os quais $f(x) = 0$. Graficamente, os zeros correspondentes às abscissas dos pontos em que a parábola correspondente à função intersecta o eixo x.

$$y = f(x) = 0 \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Assim, obtemos os zeros de uma função quadrática resolvendo a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Uma das formas de resolver a equação quadrática é por meio da fórmula de resolução da equação do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com o discriminante (delta) sendo igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

De acordo com o valor do delta, temos as seguintes situações:

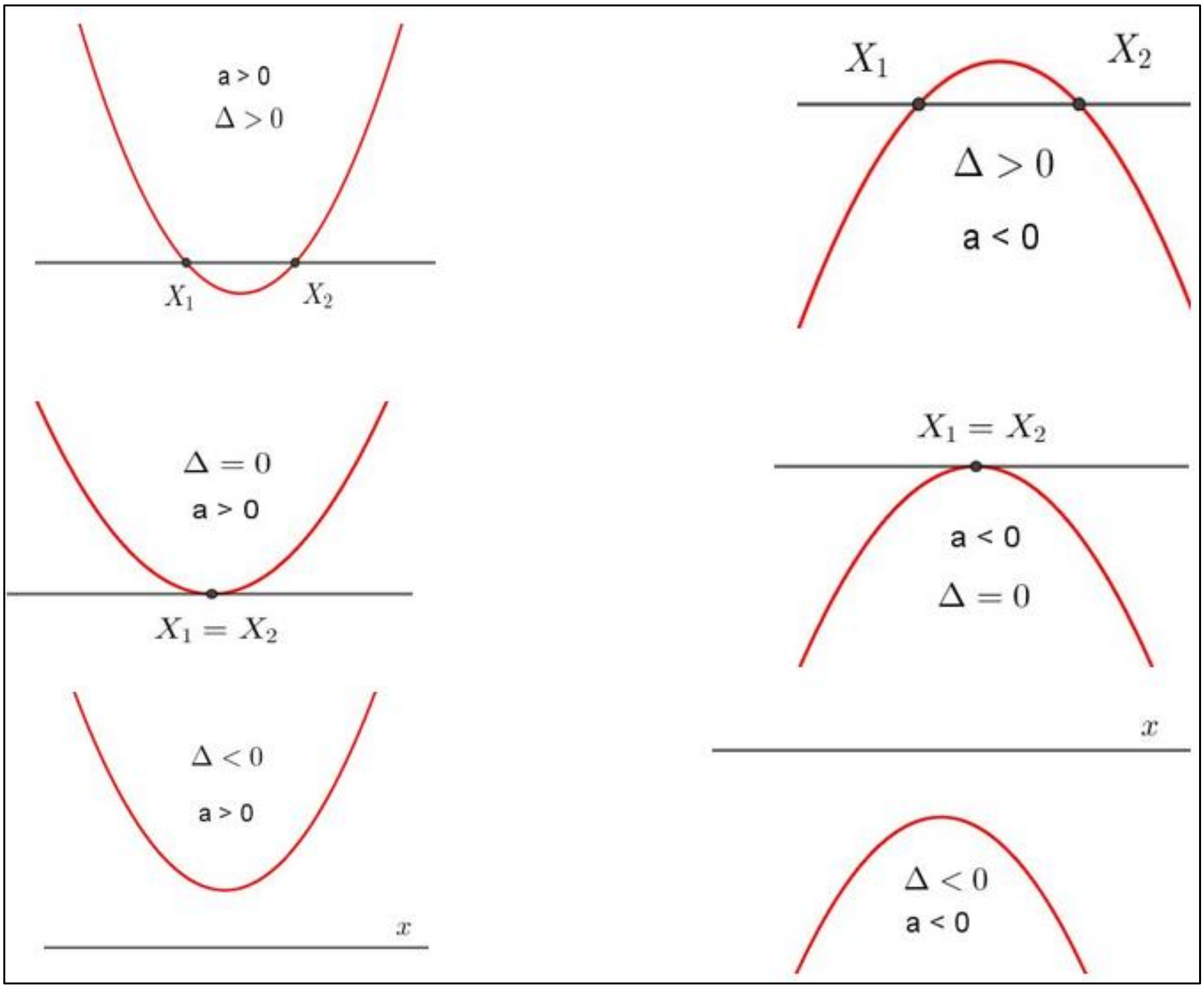
$\Delta > 0$ Dizemos que a equação possui duas raízes reais e distintas.

$\Delta = 0$ Dizemos que a equação possui duas raízes reais e elas são iguais.

$\Delta < 0$ Dizemos que a equação não possui raízes reais.

Abaixo se encontram as representações gráficas para os possíveis valores que delta pode assumir.

Figura 24: Ilustrações concavidade e raízes de parábolas



Fonte: Autores (2022).

Então apresentaríamos a eles uma equação de grau 2, sendo, por exemplo, $x^2 - 5x + 6 = 0$, temos $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, da qual resolveríamos pelo método da fórmula resolutiva de equação do segundo grau, além de apresentar o estudo do *Delta* e concavidade. Mais adiante será perguntado aos alunos se eles conhecem outros métodos de resolver a equação polinomial do segundo grau.

Esperamos que eles compartilhem outros métodos existentes como o da Soma e Produto, a fatoração algébrica, completando o quadrado, método alternativo, entre outros. Se ninguém apresentar nenhum novo método, exploraremos o método da Soma e Produto e, o método alternativo.

Método da Soma e Produto: Indicado para equações quadráticas mais simples, afirma que a soma das duas raízes deve ser igual a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e o produto entre elas deve ser igual a $x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$. Deve-se pensar quais são os dois números que somados e multiplicados satisfazem essas duas condições.

Método Alternativo: No método alternativo, o valor de nossas raízes é dado por $x = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{\Delta})}$.

4º Momento: Atividade introdutória para o estudo do vértice e dos valores extremos da função. (20 min)

Atividade introdutória 2 (20 min)

2) Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a receita da empresa será máxima?

Essa atividade foi escolhida por ser necessário a construção da função polinomial de segundo grau e da descoberta do vértice da função. Caso os alunos apresentem uma dificuldade para encontrar o ponto de máximo valor da função, faremos as seguintes perguntas, “Como seria o gráfico dessa função?”, “Ele vai ser concavo para cima ou para baixo?”, “Que ponto possui essa característica de ser menor ou maior que os outros no gráfico de uma parábola?”, “Como é calculado o vértice de uma parábola?”, “Que valor no eixo x o vértice possui?”. Caso a sala esteja estagnada por não lembrar como calcular o vértice da função, um estagiário a apresentaria no quadro.

5º Momento: Intervalo (20 min).

6º Momento: Resolução da atividade introdutória e estudo do Vértice da parábola e valores de máximo e mínimo da função quadrática. (30 min)

Após a apresentação das definições de vértice da parábola, será exposto a eles a resolução da atividade anterior através da regra disposta abaixo.

Depois do intervalo e da resolução da tarefa anterior, vamos falar sobre a definição de vértice da parábola e pontos de máximo e de mínimo valor da função quadrática.

Definição de vértice da parábola

O ponto $V = (V_x, V_y)$ é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática, com $V_x = -\frac{b}{2a}$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Ponto de máximo e de mínimo valor da função quadrática

Se $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo de $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $V_x = -\frac{b}{2a}$.

Se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo de $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $V_x = -\frac{b}{2a}$.

Em outras palavras, o vértice da parábola é o ponto de máximo ou mínimo valor da função dependendo do valor que o coeficiente angular a assumir.

7º Momento: Atividades sobre funções e equações do segundo grau. (40 min)

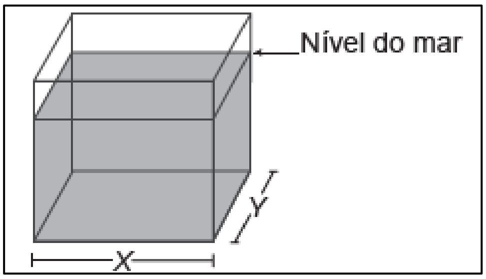
1) Determine os zeros das funções abaixo e seus vértices:

a) $f(x) = x^2 + 8x - 9$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 1$

2) **(ENEM 2017)** Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

Figura 25: Representação de um viveiro de lagosta



Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metros, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49

b) 1 e 99

c) 10 e 10

d) 25 e 25

e) 50 e 50

8º Momento: Resolução das atividades. (30 min)

Durante a resolução, os estagiários andarão ao redor da sala, incentivando e respondendo dúvidas por meio de novos questionamentos. Após o tempo de 40 minutos, vamos convidar alguns alunos para apresentarem suas resoluções oralmente. Caso não dê para resolver as tarefas, iremos deixar para a próxima aula.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos, na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referência:

ENEM 2014 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 01 mar. 2022.

ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 01 mar. 2022.

ENEM 2013 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 01 mar. 2022.

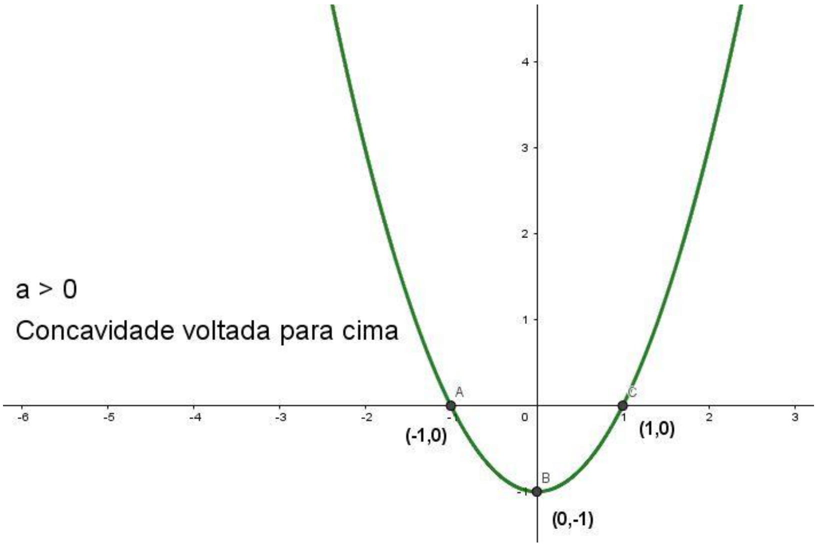
MENINO PENSANDO. Disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/menino-pensando_12847318.htm. Acesso em 19 de fev. de 2022

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**: Conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

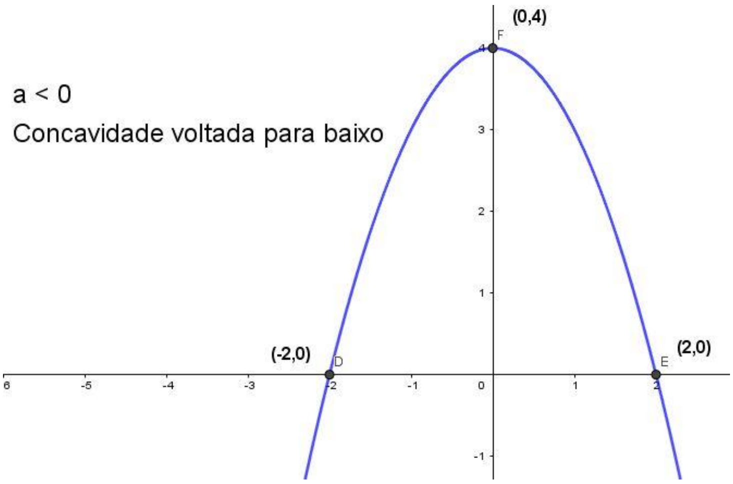
RODRIGO, Balestri. **Matemática:** interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

Apêndices:

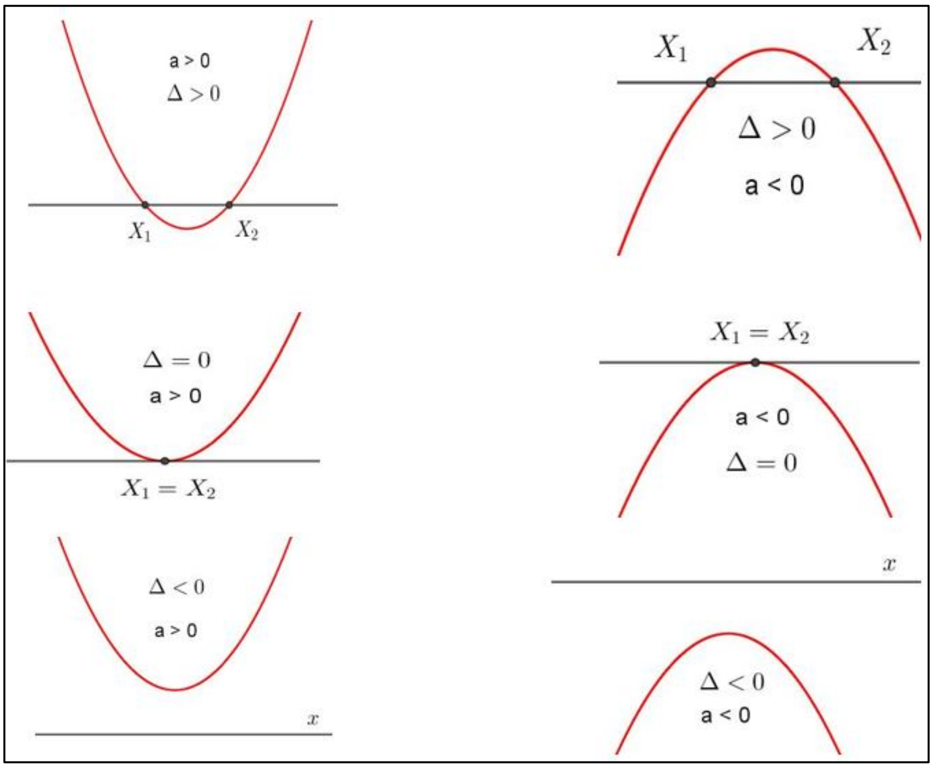
A)



B)

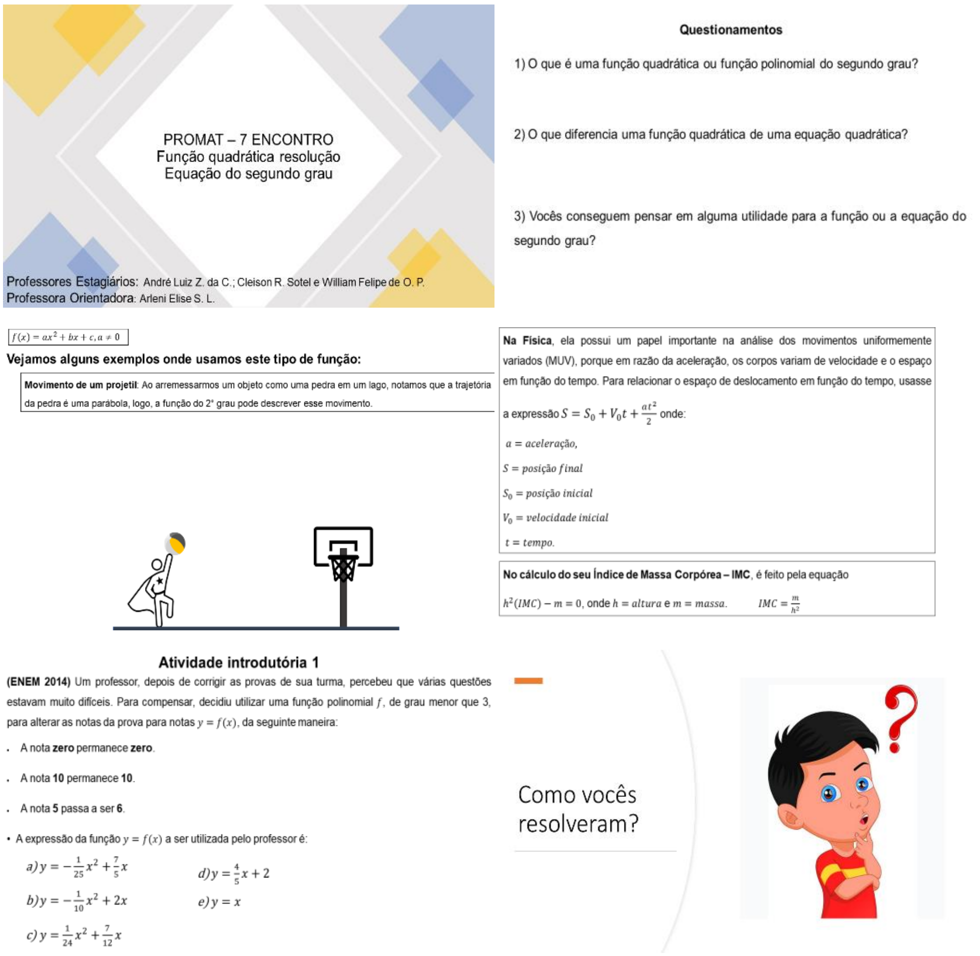


C)



a > 0
$\Delta > 0$
X_1
X_2
X_1
X_2
$\Delta > 0$
a < 0
$\Delta = 0$
a > 0
$X_1 = X_2$
$X_1 = X_2$
a < 0
$\Delta = 0$
$\Delta < 0$
a > 0
x
x
$\Delta < 0$
a < 0

D)



PROMAT – 7 ENCONTRO
Função quadrática resolução
Equação do segundo grau
Professores Estagiários: André Luiz Z. da C.; Cleison R. Sotel e William Felipe de O. P.
Professora Orientadora: Arleni Elise S. L.
Questionamentos
1) O que é uma função quadrática ou função polinomial do segundo grau?
2) O que diferencia uma função quadrática de uma equação quadrática?
3) Vocês conseguem pensar em alguma utilidade para a função ou a equação do segundo grau?
$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Vejamos alguns exemplos onde usamos este tipo de função:
Movimento de um projetil: Ao arremessarmos um objeto como uma pedra em um lago, notamos que a trajetória da pedra é uma parábola, logo, a função do 2° grau pode descrever esse movimento.
Na Física, ela possui um papel importante na análise dos movimentos uniformemente variados (MUV), porque em razão da aceleração, os corpos variam de velocidade e o espaço em função do tempo. Para relacionar o espaço de deslocamento em função do tempo, usasse a expressão $S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$ onde:
$a = aceleração,$
$S = posição\ final$
$S_0 = posição\ inicial$
$V_0 = velocidade\ inicial$
$t = tempo.$
No cálculo do seu Índice de Massa Corpórea – IMC, é feito pela equação
$h^2(IMC) - m = 0$, onde $h = altura$ e $m = massa.$ $IMC = \frac{m}{h^2}$
Atividade introdutória 1
(ENEM 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:
A nota zero permanece zero.
A nota 10 permanece 10.
A nota 5 passa a ser 6.
A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:
$a) y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$
$b) y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$
$c) y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$
$d) y = \frac{4}{5}x + 2$
$e) y = x$
Como vocês resolveram?

Definição – Função quadrática ou função polinomial do 2° grau

Uma função f de domínio o $\mathbb{R}$ e contradomínio também o $\mathbb{R}$, $(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do 2° grau quando **todo** elemento do domínio $x \in \mathbb{R}$ se associar a um **único** elemento do contradomínio $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Simbolicamente, isto é,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$a = coeficiente\ angular\ do\ gráfico\ de\ f, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$b = coeficiente\ linear, b \in \mathbb{R}$$

$$c = termo\ independente, ponto\ do\ eixo\ y\ que\ faz\ interseção\ com\ o\ gráfico\ f, c \in \mathbb{R}$$

Geometricamente, seu gráfico é o de uma parábola.

Vamos construir o gráfico das seguintes funções:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1} \qquad \boldsymbol{g(x) = -x^2 + 4}$$

Definição – Concavidade

A parábola representativa da função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo". Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para "cima". Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para "baixo".

Se $a < 0$

Se $a > 0$

Zero de uma função quadrática

Os zeros de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores de x para os quais $f(x) = 0$. Graficamente, os zeros correspondentes às abscissas dos pontos em que a parábola correspondente à função intersecta o eixo x.

$$y = f(x) = 0 \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Assim, obtemos os zeros de uma função quadrática resolvendo a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Uma das formas de resolver a equação quadrática é por meio da fórmula de resolução da equação do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com o delta sendo igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

De acordo com o valor do delta, temos as seguintes situações:

$\Delta > 0$ Dizemos que a equação possui duas raízes reais e distintas.

$\Delta = 0$ Dizemos que a equação possui duas raízes reais e elas são iguais.

$\Delta < 0$ Dizemos que a equação não possui raízes reais.

Agora, vamos fazer um estudo desta função bem como a determinação de suas raízes:

$$h(x) = x^2 - 5x + 6$$

Método da Soma e Produto: Indicado para equações quadráticas mais simples, afirmando que a soma das duas raízes deve ser igual a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e o produto entre elas deve ser igual a $x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$. Devesse pensar quais dois números somados e multiplicados satisfazem essas duas condições.

Exemplo
Encontre as raízes de $x^2 - 2x - 3 = 0$.

R: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

Método Alternativo: No método alternativo, o valor de nossas raízes é dado por

$$x = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{\Delta})}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

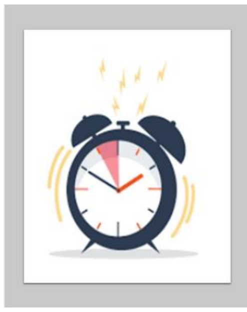
Atividade Introdutoria 2

Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a receita da empresa será máxima?

Faremos a resolução na lousa!

INTERVALO (20 min)

9h40min às 10h



Vajamos como podemos resolver a atividade anterior através da definição de vértice da parábola:

$$x = n°\ de\ passageiros\ no\ avião$$

$$(800 + 10(100 - x))x = (800 + 1000 - 10x)x = -10x^2 + 1800x$$

Seja $f(x) = -10x^2 + 1800x$ a função que dá o valor que a companhia arrecada por passageiros no avião. Identificamos que seu ponto de máximo é o vértice dado por:

$$V = (V_x, V_y)$$

$$V_x = -\frac{b}{2a} \qquad V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1800}{2*-10} = \frac{1800}{2*10} = \frac{180}{2} = 90.$$

$$V_y = -\frac{\Delta}{4a} \qquad V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1800^2}{4*-10} = \frac{1800*180}{4} = 1800 * 45 = 81000.$$

Assim, com 90 passageiros a empresa arrecada o montante de R$ 81.000,00

Definição de vértice da parábola

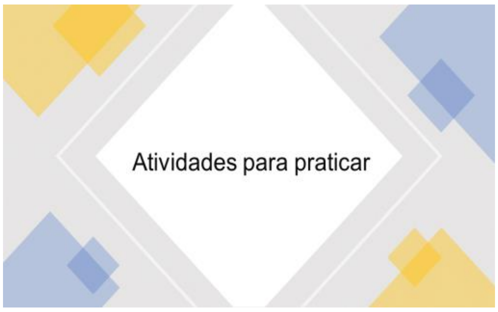
O ponto $V = (V_x, V_y)$ é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática, com $V_x = -\frac{b}{2a}$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Ponto de máximo e mínimo valor da função quadrática

Se $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo de $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $V_x = -\frac{b}{2a}$.

Se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo de $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $V_x = -\frac{b}{2a}$.

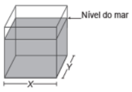
Em outras palavras, o vértice da parábola é o ponto de máximo ou mínimo valor da função dependendo do valor que o coeficiente angular a assumir.



1) Determine os zeros das funções abaixo e seus vértices:

$a) f(x) = x^2 + 8x - 9$ b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

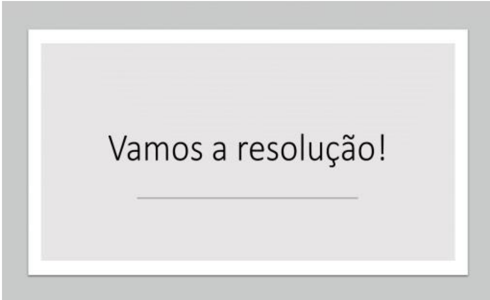
(ENEM 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49
b) 1 e 99
c) 10 e 10
d) 25 e 25
e) 50 e 50



a) Fazendo $f(x) = 0$, vamos ter

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

Usando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, teremos

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4 * 1 * (-9)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

Logo, os zeros da função são as raízes, $x_1 = \frac{-8+10}{2} = 1$ e $x_2 = \frac{-8-10}{2} = -9$.

Nosso vértice será $V = (V_x, V_y)$ com $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(8)}{2*1} = -4$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{100}{4*1} = -25$.

Então, $V = (-4, -25)$.

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

Fazendo $f(x) = 0$, vamos ter

$$-x^2 + 7x - 12 = 0$$

Vamos usar o método alternativo apresentado em sala $x = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{\Delta})}$.

$$x = \frac{2*(-12)}{(-7 \pm \sqrt{7^2 - 4*-1*12}} \Rightarrow \quad x = \frac{-24}{(-7 \pm \sqrt{1})}$$

Logo, os zeros da função são as raízes da $x_1 = \frac{-24}{(-7+1)} = \frac{24}{6} = 4$ e $x_2 = \frac{-24}{(-7-1)} = \frac{24}{8} = 3$.

O vértice será $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(7)}{2*(-1)} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4*(-1)} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

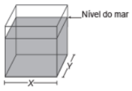
Então, $V = (\frac{7}{2}, \frac{1}{4})$.

Como o perímetro linear de tela de ser 100, temos:

$2x + 2y = 100 \rightarrow y = -x + 50$

E para termos área da base do viveiro:

$$A = x * y$$



Substituindo y:

$A = x * (-x + 50) \rightarrow A = -x^2 + 50x$

Temos então a função que nos dá a área da base do viveiro pelo comprimento x, note que é uma função do segundo grau do tipo $A(x) = -x^2 + 50x$, como a<1, a concavidade é para baixo, e permite ponto de máximo, agora devemos encontrar o Vx:

$Vx = \frac{-b}{2a} \rightarrow Vx = \frac{-50}{2*-1} = \frac{-50}{-2} = 25$

Assim temos o valor de x para que a área seja a máxima, para obtermos y, basta:

$y = -x + 50 \rightarrow y = -25 + 50 = 25$

Logo, a alternativa correta é a d) 25 e 25.

11.1. **Resoluções das atividades;**

1) **(ENEM 2014)** Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota **zero** permanece **zero**.
- A nota **10** permanece **10**.
- A nota **5** passa a ser **6**.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

f) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

g) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

h) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

i) $y = \frac{4}{5}x + 2$

j) $y = x$

R: Esta questão pode ser resolvida a partir dos dados que a questão nos fornece que é: pondo $f(x) = y$

A nota **zero** permanece **zero** → $f(0) = 0$

A nota **10** permanece **10** → $f(10) = 10$

A nota **5** passa a ser **6** → $f(5) = 6$

Agora basta fazer os testes:

e) $y = x \rightarrow e(x) = y \rightarrow \; e(x) = x$

Porém falha em $f(5) = 5 \; \neq 6$ ***assim e) não é verdadeira***

d) $y = \frac{4}{5}x + 2 \rightarrow d(x) = y \rightarrow \; d(x) = \frac{4}{5}x + 2$

Porém falha em $f(0) = 2 \; \neq 0$ ***assim d) não é verdadeira***

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x \rightarrow c(x) = y \rightarrow \; c(x) = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

$c(5) = \frac{1}{24}5^2 + \frac{7}{12}5 \rightarrow c(5) = \frac{25}{24} + \frac{35}{12} \rightarrow \; c(5) = \frac{25}{24} + \frac{35}{12} \rightarrow \; c(5) = \frac{25}{24} + \frac{70}{24} = \frac{95}{24} \; \neq 6$ ***assim c) não é verdadeira.***

a) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x \rightarrow b(x) = y \rightarrow \; b(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

$b(5) = -\frac{1}{10}5^2 + 2 * 5 \; \rightarrow \; b(5) = -\frac{25}{10} + 10 \; \rightarrow \; b(5) = -\frac{25}{10} + \frac{100}{10} = \frac{75}{10} = 7{,}5 \; \neq 6$

assim b) não é verdadeira.

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x \rightarrow a(x) = y \rightarrow \; a(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

$$a(0) = -\frac{1}{25}0^2 + \frac{7}{5}0 = 0$$

$a(5) = -\frac{1}{25}5^2 + \frac{7}{5}5 = -\frac{25}{25} + 7 = -1 + 7 = 6$

assim a) é verdadeira.

2) Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a receita da empresa será máxima?

R: Podemos encontrar uma função que nos dê o valor que a companhia arrecadará, em função do número de passageiros.

$$f(x) = \; (800 + (100 - x)10)x$$

$$f(x) = \; -10x^2 + 1800x$$

Agora basta encontrar o valor máximo da função através do vértice:

$$V_x = \frac{-1800}{-20} = 90$$

Logo, o máximo valor da receita da empresa é com 90 passageiros.

1) Determine os zeros das funções abaixo e seus vértices:

c) $f(x) = x^2 + 8x - 9$

d) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

R:

a) Fazendo $f(x) = 0$, vamos ter

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

Usando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, teremos

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4 * 1 * (-9)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

Logo, os zeros da função são as raízes, $x_1 = \frac{-8+10}{2} = 1$ e $x_2 = \frac{-8-10}{2} = -9$.

Nosso vértice será $V = (V_x, V_y)$ com $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(8)}{2*1} = -4$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{100}{4*1} = -25$. Então, $V = (-4, -25)$.

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

Fazendo $f(x) = 0$, vamos ter

$$-x^2 + 7x - 12 = 0$$

Vamos usar o método alternativo apresentado em sala $x = \frac{2c}{(-b \pm \sqrt{\Delta})}$.

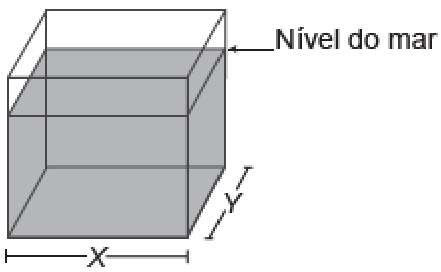
$$x = \frac{2 * -12}{(-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 * -1 * 12}}$$

$$x = \frac{-24}{(-7 \pm \sqrt{1})}$$

Logo, os zeros da função são as raízes da $x_1 = \frac{-24}{(-7+1)} = \frac{24}{6} = 4$ e $x_2 = \frac{-24}{(-7-1)} = \frac{24}{8} = 3$.

O vértice será $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(7)}{2*(-1)} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4*(-1)} = 0{,}25$. Então, $V = (3.5, 0.25)$.

5) **(ENEM 2017)** Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

a) 

b) Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49

b) 1 e 99

c) 10 e 10

d) 25 e 25

e) 50 e 50

R: Como o perímetro linear de tela de ser 100, temos:

$2x + 2y = 100 \rightarrow y = -x + 50$

E para termos área da base do viveiro:

$$A = x * y$$

Substituindo y:

$A = x * (-x + 50) \rightarrow A = -x^2 + 50x$

Temos então a função que nos dá a área da base do viveiro, note que é uma função de grau dois do tipo $f(x) = -x^2 + 50x$, como a<1, a concavidade é para baixo, e permite ponto de máximo, agora devemos encontrar o Vx:

$Vx = \frac{-b}{2a} \rightarrow Vx = \frac{-50}{2*-1} = \frac{-50}{-2} = 25$

Assim temos o valor de x para que a área seja a máxima, para obtermos y, basta:

$y = -x + 50 \rightarrow y = -25 + 50 = 25$

Logo a alternativa correta é a d) 25 e 25.

11.2. Material entregue aos alunos;

Definição – Função quadrática ou função polinomial do 2° grau

Uma função f de domínio o $\mathbb{R}$ e contradomínio também o $\mathbb{R}$, $(f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do 2° grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$. Simbolicamente, isto é,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

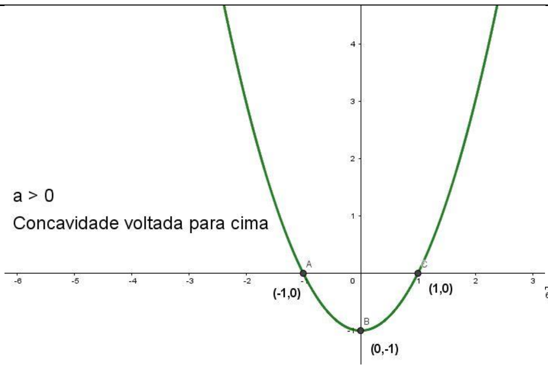
$x \mapsto y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

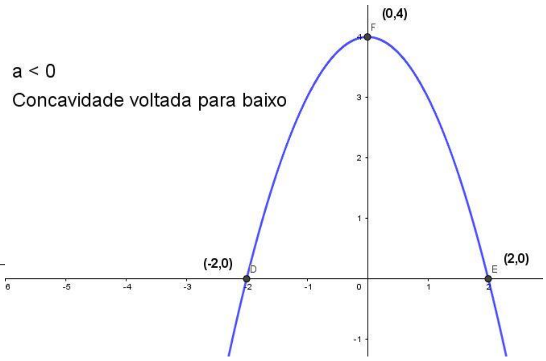
$a = coeficiente\ angular\ do\ gráfico\ de\ f, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$b = coeficiente\ linear, b \in \mathbb{R}$

$c = termo\ independente, ponto\ do\ eixo\ y\ que\ faz\ interseção\ com\ o\ gráfico\ f, c \in \mathbb{R}$

Geometricamente, seu gráfico é o de uma parábola.





Definição – Concavidade

A parábola representativa da função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo". Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para "cima. Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Zero de uma função quadrática

Os zeros de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores de x para os quais $f(x) = 0$. Graficamente, os zeros correspondentes às abscissas dos pontos em que a parábola correspondente à função intersecta o eixo x.

$$y = f(x) = 0 \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Assim, obtemos os zeros de uma função quadrática resolvendo a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

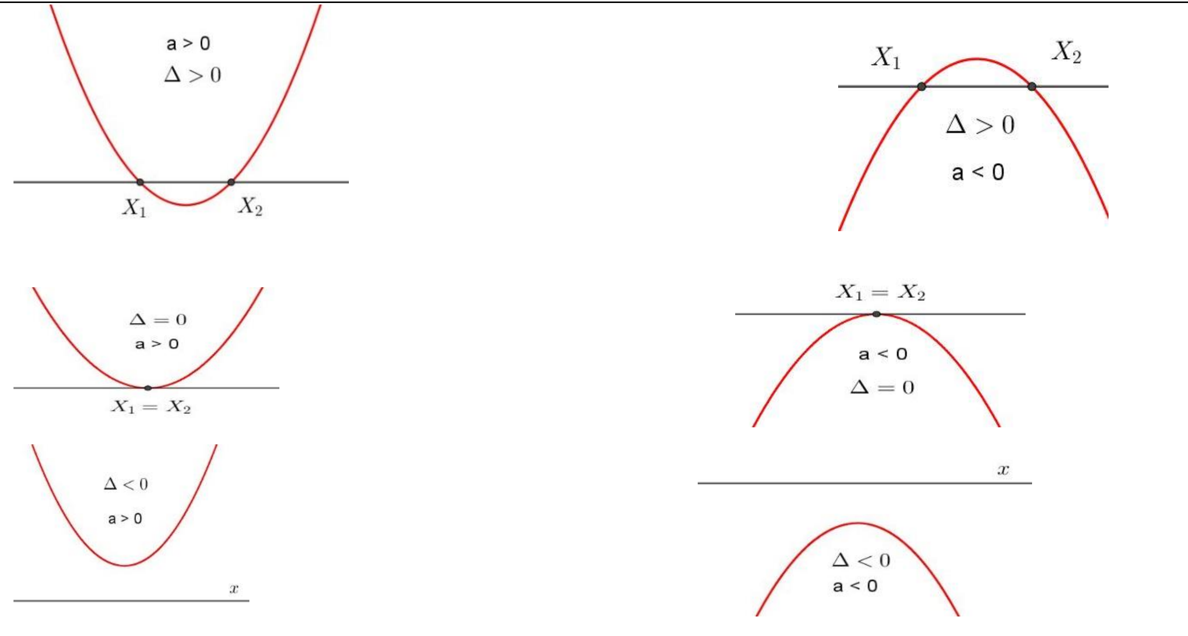
Uma das formas de resolver a equação quadrática é por meio da fórmula de resolução do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com o discriminante (delta) sendo igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

De acordo com o valor do delta, temos as seguintes situações:

$\Delta > 0$ Dizemos que a equação possui duas raízes reais e distintas.

$\Delta = 0$ Dizemos que a equação possui duas raízes reais e elas são iguais.

$\Delta < 0$ Dizemos que a equação não possui raízes reais.



Método da Soma e Produto: Indicado para equações quadráticas mais simples, afirmando que a soma das duas raízes deve ser igual a $X_1 + X_2 = -\frac{b}{a}$ e o produto entre elas deve ser igual a $X_1 * X_2 = \frac{c}{a}$. Devesse pensar quais dois números somados e multiplicados satisfazem essas duas condições.

Método Alternativo: No método alternativo, o valor de nossas raízes é dado por $x = \frac{2c}{(-b\pm\sqrt{\Delta})}$.Por exemplo, $x^2 - 5x + 6 = 0$, temos $x = \frac{2c}{(-b\pm\sqrt{\Delta})} = \frac{2*6}{(5\pm\sqrt{1})} = \frac{12}{5\pm1}$ que resulta em $X_1 = 2$ e $X_2 = 3$.

Definição de vértice da parábola

O ponto $V = (V_x, V_y)$ é chamado de vértice da parábola representativa da função quadrática, com $V_x = -\frac{b}{2a}$ e $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Ponto de máximo e de mínimo valor da função quadrática

Se $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo de $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $V_x = -\frac{b}{2a}$.

Se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo de $V_y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $V_x = -\frac{b}{2a}$.

Em outras palavras, o vértice da parábola é o ponto de máximo ou mínimo valor da função dependendo do valor que o coeficiente angular a assumir.

Atividade introdutória 1 (10 min)

(ENEM 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota **zero** permanece **zero**.
- A nota **10** permanece **10**.
- A nota **5** passa a ser **6**.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a)$y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$ e) $y = x$

Atividade introdutória 2 (20 min)

1) Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a receita da empresa será máxima?

Atividades

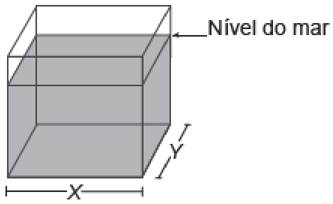
1) Determine os zeros reais das funções sua concavidade:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
c) $f(x) = (x-5)(x-4)$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$

A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1, 0) e seu vértice é o ponto de coordenadas (3, v). Determine v.

2) Dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine o de área máxima.

3) **ENEM 2017)** Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Fonte: https://www.enem.inep.gov.br/

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a)1 e 49. b)1 e 99. c)10 e 10. d)25 e 25. e) 50 e 50

11.3. **Relatório;**

Encontro 7 - 02/04/2022

Relatório 7 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia dois de abril de 2022, sábado, no período da manhã, na sala A103 no bloco das salas de aula na Unioeste de Cascavel-PR, foi realizado o sétimo encontro do Promat. Tivemos a participação de seis alunos, e todos já haviam participado em pelo menos um encontro dos anteriores. Tivemos o número de participantes reduzido, acreditamos que seja pelo fato de ser um sábado pós feriado e por conta dos eventos climáticos que podem ter influenciado na ausência dos participantes. O conteúdo trabalhado foi de função do segundo grau junto com o estudo da parábola.

No primeiro momento realizamos algumas perguntas em relação ao entendimento dos alunos com a função do segundo grau, houve a participação deles assim que comentamos algumas características da função, participações do tipo “Seria aquela em forma de um V?!” e “Aquela com o x elevado a dois”, concepções corretas, salvo o uso não formal, nós confirmamos que era isso mesmo, apresentamos a formalização destas concepções, como o “V” referido seria a representação gráfica da parábola que lembra a letra “V”, o “x” elevado é quando temos o “x” elevado a dois sendo o monômio de maior grau, logo temos um polinômio de grau dois, em seguida apresentamos alguns exemplos de aplicações destas funções no nosso dia a dia, como no cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC), então seguimos para uma atividade do ENEM na qual era procurada a função que representava uma otimização de notas por parte de um professor. Nesta questão todos os grupos chegaram à resolução, com o auxílio dos estagiários em suas dúvidas. As dúvidas estavam em alguns cálculos de operações básicas e de identificar a variável dependente e a independente, após um tempo a resolução foi exposta em lousa.

Em seguida explicamos a definição formal, o domínio, o contradomínio e composição dos coeficientes da função do segundo grau. Neste momento também iniciamos explicando sobre a interpretação do gráfico de função, mostrando a eles em relação a concavidade, raízes, intersecção com o eixo y e, ponto de máximo e mínimo da função do segundo grau. Construímos dois gráficos de duas funções, sobre as quais complementamos sobre a interpretação da parábola. Ainda comentamos brevemente a origem desta curva, que seria uma seção cônica. Aproveitamos o momento para justificar a tão citada fórmula resolutiva de equação do segundo grau, que os alunos insistem em chamar de “Fórmula de Bhaskara”. Sempre alertamos a respeito do nome, mas os deixamos livres para identificá-la do modo que preferirem.

Seguimos apresentando outros dois tipos de métodos para encontrar as raízes da equação do segundo grau, sendo “soma e produto” e o método alternativo de $x = \frac{2c}{(-b\pm\sqrt{\Delta})}$. Exploramos com eles um exercício e os alunos deram preferência pelo uso da fórmula resolutiva de equação do segundo grau.

Após o intervalo deixamos para resolução de atividades. Seguimos aos grupos para auxílio individual, alternamos entre momento para os alunos pensarem em uma resolução, explicações e retomadas de conceitos. Foram realizadas ao todo três atividades, os alunos mostraram-se interessados e instigados a resolver, mesmo sem compreender muito o problema, sempre solicitando a ajuda de um de nós.

As interações nesta aula foram maiores que as anteriores, eventualmente possa ser devido os alunos estarem em número reduzido e se sentido mais confortáveis em participar, as dúvidas apresentadas eram, muitas das vezes em operações simples, interpretação do problema proposto, uso adequado das operações para isolar incógnitas e ainda surgiram dúvidas de como se calcula o perímetro e área de um retângulo, pois em uma das atividades solicitava estes cálculos, sempre os alunos apresentavam o caminho ou um dos caminhos corretos, porém em algum passo se deparavam com obstáculos epistemológicos, como por exemplo “aqui eu posso cortar”, quando que não levavam em consideração a operação correta em uma equação, os mesmos com alguma ajuda em relembrar como fizemos em aula passada compreendiam e conseguiam chegar na resolução.

Como os alunos estavam participando, e quando solicitávamos concepções em relação a uma parábola concluímos que tivemos os objetivos alcançados, mesmo não sendo todos que participavam, mas individualmente verificamos que compreenderam os conceitos trazidos em aula, apenas cometendo erros em cálculos básicos.

12. Encontro 8: Plano de aula;

8º Encontro – 30 de abril de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Geometria dos triângulos.

Objetivo geral: Relembrar conceitos geométricos no plano que fazem relação com o estudo dos triângulos, além de revisar seus tipos e suas propriedades.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos, ao final dessa aula, sejam capazes de:

- Classificar os triângulos a partir da medida de seus lados ou da medida de seus ângulos internos.
- Compreender os principais resultados da geometria plana que se relacionam com o estudo de triângulos, além de aplicá-los na resolução de problemas;
- Compreender e aplicar as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, junto dos ângulos notáveis.
- Compreender o conceito de semelhança entre triângulos e a montar a proporção entre as medidas de lados.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: *Notebook*, Projetor, *Power Point*, Folhas Sulfites.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que os alunos adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Nessa aula, procuraremos negociar a não utilização da calculadora, com o objetivo de trazer um estímulo para o cálculo mental e o uso de estratégias que facilitem e agilizem os cálculos. Isso se deve ao ENEM e outros vestibulares não permitirem sua utilização.

Utilizaremos o projetor no decorrer da aula para deixá-la mais dinâmica, apresentando os conteúdos em lâminas previamente preparadas. A resolução de tarefas ou anotações de exemplos será feita no quadro.

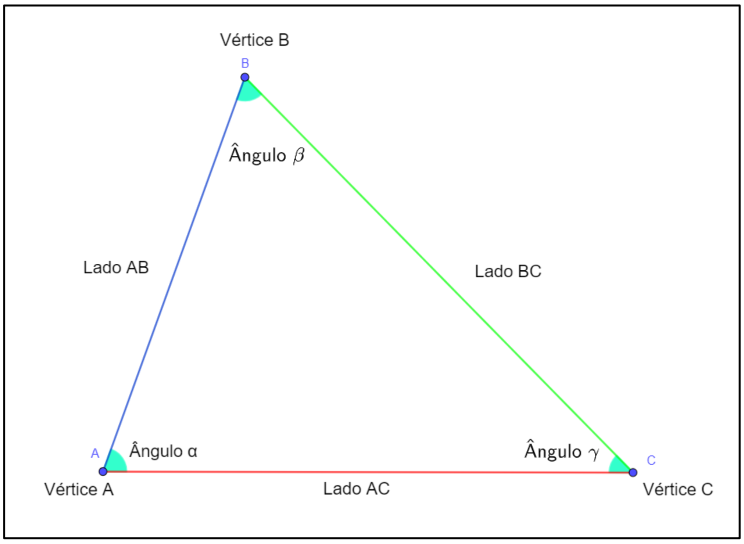
Os alunos serão organizados em grupos de quatro ou cinco elementos, facilitando o atendimento às dúvidas. Será entregue após o segundo momento a primeira lista, frente e verso, contendo todos os problemas para essa aula. A última lista, também frente e verso, possuirá o resumo do conteúdo e será entregue antes do oitavo momento.

1º Momento: Introdução de conceitos sobre triângulos. (60min)

Iniciaremos a aula apresentando de maneira breve um triângulo, em seguida distribuiremos um objeto, do qual possibilite a exploração da desigualdade triangular.

Definição: Triângulo é uma figura geométrica composta por três lados, três vértices e três ângulos internos, ainda a soma destes ângulos é igual a **180 graus**. Além disso, dizemos que dois triângulos ABC e DEF são **congruentes** quando, ao compará-los, os dois possuem lados e ângulos internos com mesmas medidas.

Figura 26: Ilustração de triângulo.

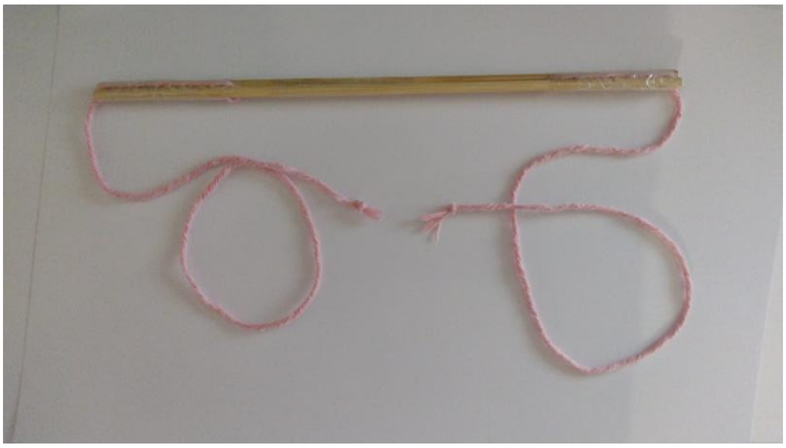


Fonte: Autores (2022).

Será dado um objeto por grupo, e será orientado que criem uma tabela para anotar as medidas adotadas, e a medida da aresta fixa. Será pedido que criem nós a cada nova medida adotada, o objeto é composto por um lado fixo, e outros dois cordões onde é possível criar triângulos, ligando as pontas dos cordões, inicialmente pediremos que criem um nó em um centímetro de cada cordão, e anotem e decidam se é possível formar um triângulo, após anotar o resultado, eles deverão dar o próximo ou os próximos nós a uma distância de um centímetro do anterior, podendo escolher em dar apenas um nó ou dois, e repetir o processo até que estejam satisfeitos de uma condição para termos um triângulo.

Objeto a ser utilizado:

Figura 27: Objeto utilizado na dinâmica.



Fonte: Autores (2022).

Após todos buscarem uma conclusão será solicitado para que algum aluno ou alguma aluna explique o que concluiu sobre o experimento, a ausência de explicações os estagiários apresentaram a desigualdade triangular.

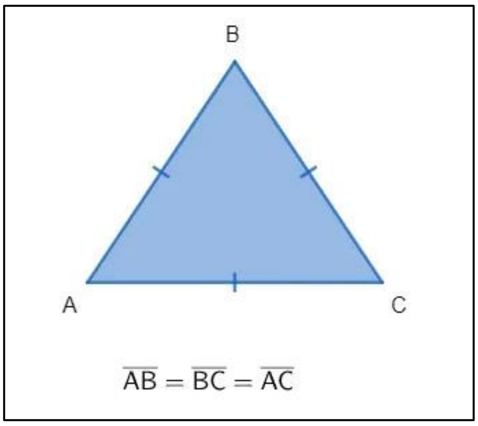
Desigualdade Triangular: A soma de dois dos lados de um triângulo deve ser maior que o terceiro lado.

A desigualdade triangular será apresentada no *GeoGebra* com uma apresentação do caso. Em seguida, apresentaremos as classificações de triângulos, e exemplos de cada um.

Classificação pela medida dos lados

Equilátero: Quando os três lados têm mesma medida. Consequentemente, todos os ângulos internos medem 60°. Um triângulo equilátero também é isósceles.

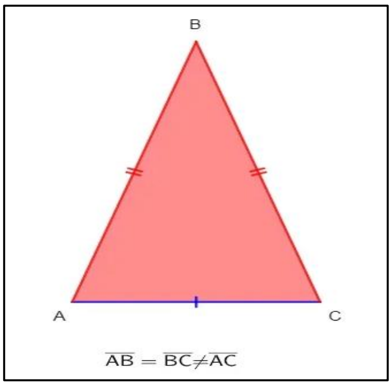
Figura 28: Triângulo equilátero



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm

Isósceles: Quando dois lados têm medidas iguais. Chamamos de base o lado de medida distinta e os dois ângulos da base possuem mesma medida.

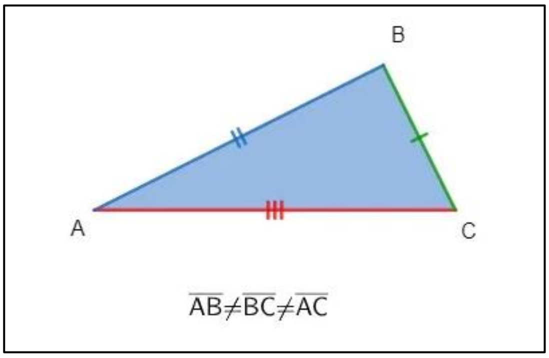
Figura 29: Triângulo isósceles.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm.

Escaleno: Quando os três lados têm medidas diferentes. Consequentemente, cada ângulo interno tem uma medida diferente.

Figura 30: Triângulo escaleno.

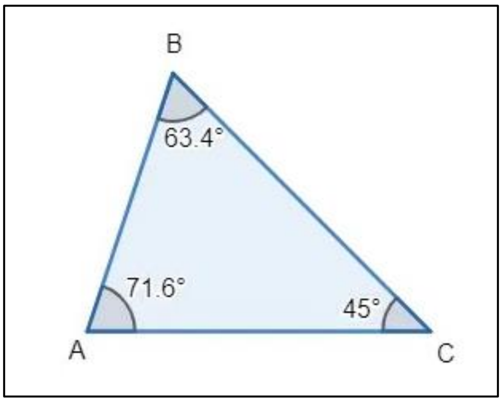


Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm.

Classificação pela medida dos ângulos internos

Acutângulo: Quando os três ângulos Internos são agudos (menores que 90°).

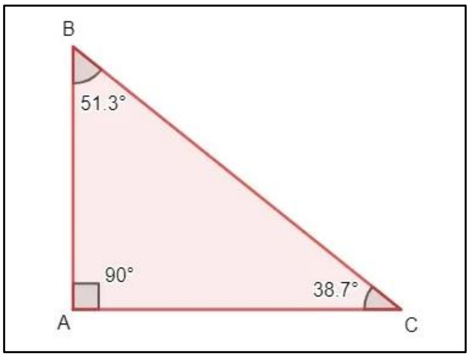
Figura 31: Triângulo acutângulo.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm.

Retângulo: Quando um dos ângulos internos é reto (medida igual a 90°).

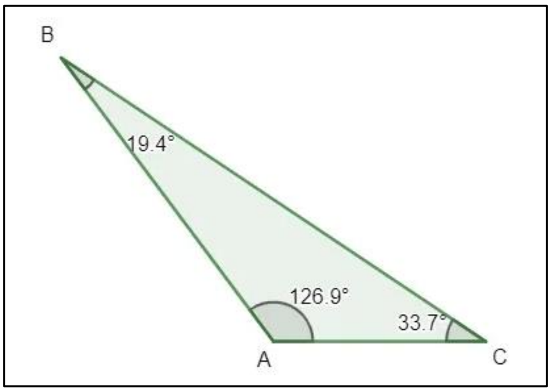
Figura 32: Triângulo retângulo.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm

Obtusângulo: Quando um dos ângulos internos é obtuso (a medida é maior que 90° e menor que 180°).

Figura 33: Triângulo obtusângulo.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm.

Para avaliarmos o aprendizado sobre os tipos de triângulos, escolhemos essa atividade do ENEM de 2018 que trabalha somente sobre esse assunto, sendo necessário identificar o tipo de triângulo na imagem. Daremos um tempo de 10 minutos para eles resolverem, e após esse tempo vamos convidar algum aluno para comentar sua resolução.

1° Atividade

(ENEM – 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Figura 34: Ilustração atividade 1, caiaque com remo.

Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Fonte: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2018/segundo-dia/o-tipo-de-triangulo-com-vertices-nos-pontos-b-e-c-no-momento-em-que-o-remador-esta-nessa-posicao/?cor=azul

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC* cujo ângulo *BÂC* tem medida de 170°.

O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A, B* e *C*, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) Retângulo escaleno.

b) Acutângulo escaleno.

c) Acutângulo isósceles.

d) Obtusângulo escaleno.

e) Obtusângulo isósceles.

3° Momento: Resultados importantes da geometria no plano que se relaciona com os triângulos. (15 min)

Nesse momento, planejamos revisar alguns conhecimentos que comumente se relacionam com o estudo de triângulos, mas que os alunos não estão habituados em usarem na resolução de problemas geométricos. Esses conteúdos são: Ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares, ângulos suplementares e retas paralelas cortadas por uma transversal.

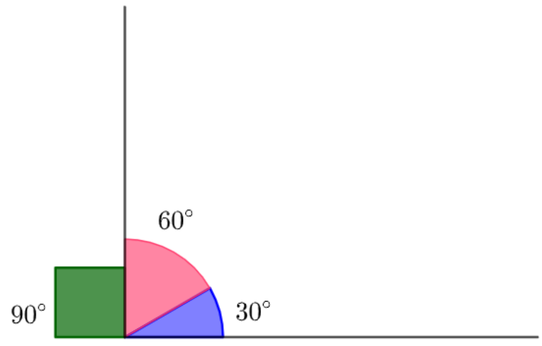
Ângulos complementares e suplementares

Quando a soma de dois ângulos ou mais resulta em 90°, dizemos que eles são ângulos complementares. E quando a soma de dois ângulos ou mais resulta em 180°, dizemos que eles são suplementares.

Exemplos:

O ângulo de 60º é complementar do 30º ou o ângulo de 30º é complementar do 60º.

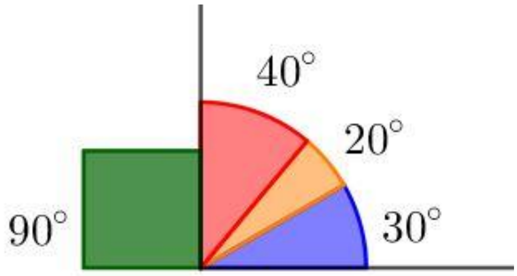
Figura 35: Ângulo complementar.



Fonte: Autores (2022).

Os ângulos 40°, 20° e 30° são complementares**.**

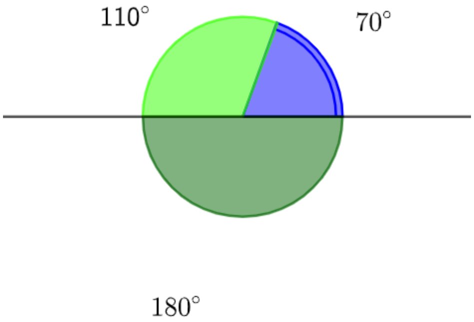
Figura 36: Ângulos complementares.



Fonte: Autores (2022).

Os ângulos 110º e 70º são suplementares**.**

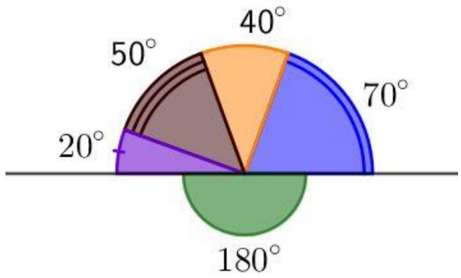
Figura 37: Ângulos suplementares.



Fonte: Autores (2022).

Os ângulos 40°,50°, 20° e 70° são suplementares**.**

Figura 38: Ângulos suplementares.

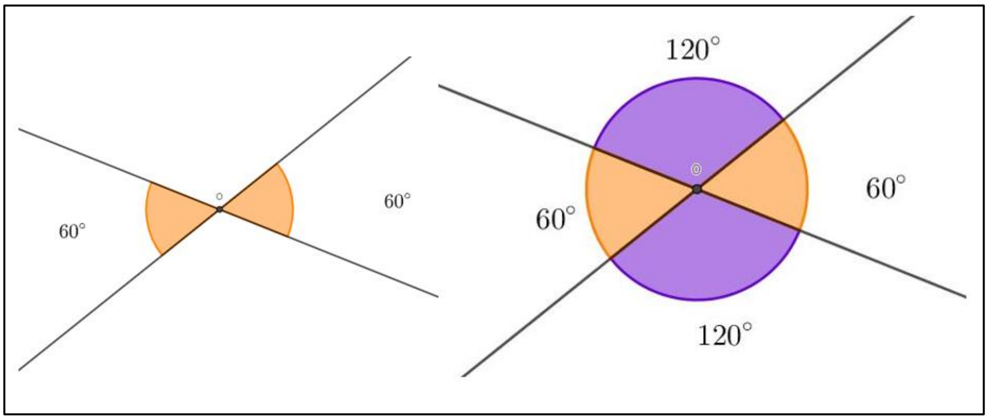


Fonte: Autores (2022).

Ângulos opostos pelo vértice.

Quando duas retas se cruzam é formado um vértice e quatro ângulos. Quando dois ângulos são opostos pelo mesmo vértice, eles têm a mesma medida.

Figura 39: Ângulos opostos pelo vértice.

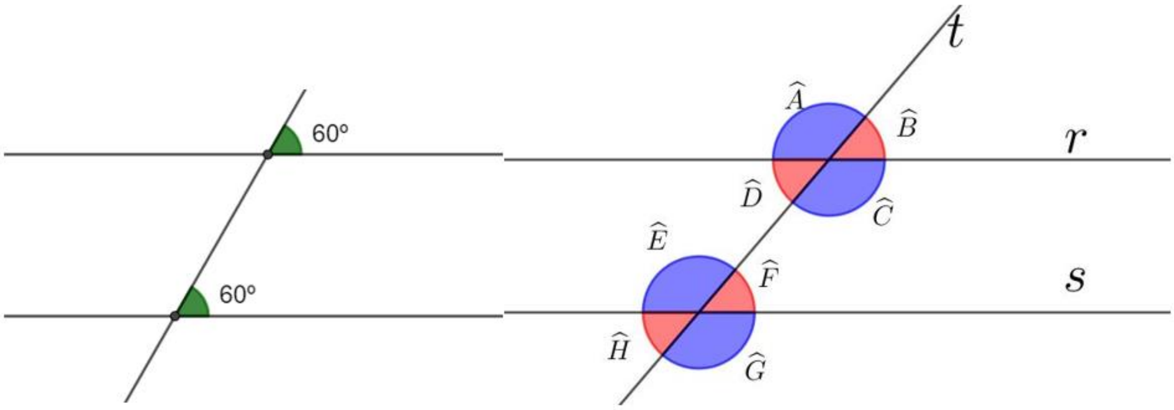


Fonte: Autores (2022).

Retas paralelas cortadas por uma transversal

Quando duas retas paralelas s e r são ambas cortadas por uma reta transversal t, será formado ângulos como os representados abaixo. Na figura, os ângulos que apresentam a mesma cor são congruentes, ou seja, possuem mesma medida. Dois ângulos de cores diferentes são suplementares, ou seja, somam 180º.

Figura 40: Exemplos de retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: Autores (2022).

4° Momento: Atividade introdutória sobre trigonometria no triângulo retângulo. (25 min)

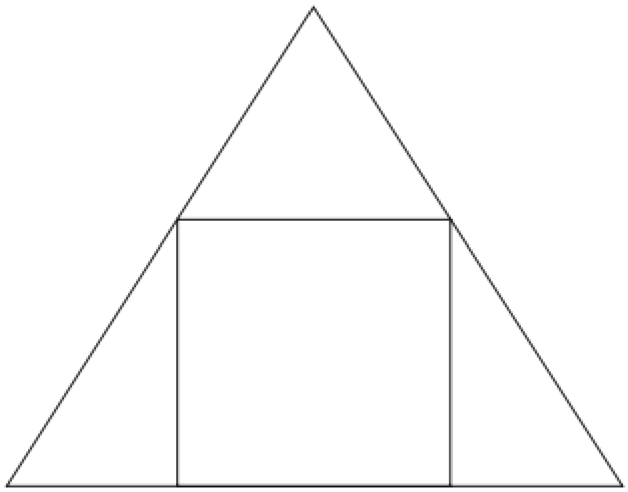
No próximo momento, iremos aplicar um problema do ENEM de 2021, que foi escolhida por apresentar alguns dos resultados vistos anteriormente como retas paralelas cortadas por uma transversal e ângulos opostos pelo vértice. Além disso, temos uma necessidade de usar as relações trigonométricas no triangulo retângulo para descobrir o comprimento de uma parte do lado do triângulo equilátero.

Os alunos podem apresentar alguma dificuldade em visualizar as retas paralelas, a transversal passando por elas e de como usar a relação trigonométrica do seno 60 para encontrar o valor do lado. Por isso, vamos auxiliar os discentes através de questionamentos caso se mostrem estagnados na resolução ou não lembrem do valor do seno nesse ângulo.

2° Atividade

(ENEM - 2021) Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.

Figura 41: Ilustração atividade um.



Fonte: ENEM 2021.

Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede 1 m^2, qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$).

a) 1,6
b) 2,2
c) 2,4
d) 3,7
e) 6,4

5° Momento: Intervalo. (20 min)

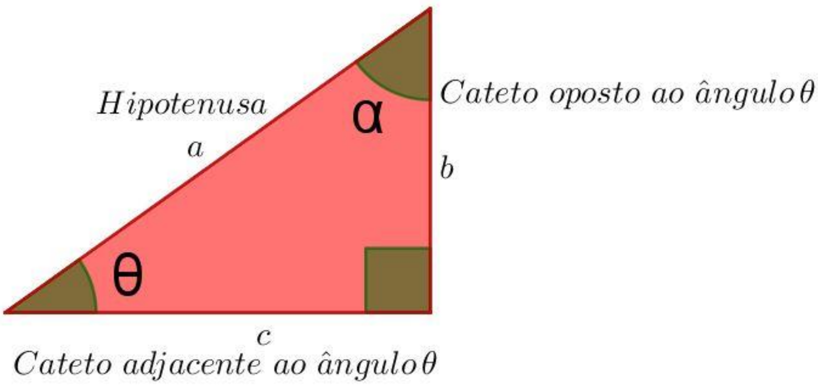
6° Momento: Correção da atividade e definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo. (30 min)

Em seguida, vamos levar um tempo de 15 minutos para mostrar a resolução da atividade anterior e mais 15 minutos para falar sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Razões trigonométricas

São resultados de divisões entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo. Elas são capazes de relacionar os lados com os ângulos de um triângulo retângulo. Uma razão trigonométrica relacionada com um determinado ângulo terá um valor fixo para qualquer triângulo, independentemente do tamanho de seus lados, pois, como eles são proporcionais, a razão entre os lados correspondentes será igual.

Figura 42: Trigonometria em um triângulo retângulo.



Fonte: Autores (2022).

Assim, definiremos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo θ, como sendo:

$$Sen\ \theta = \frac{Cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cos}\ \theta = \frac{Cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$Tg\ \theta = \frac{Sen\ \theta}{Cos\ \theta} = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta} = \frac{b}{c}$$

Ângulos notáveis

Figura 43: Tabela ângulos notáveis.

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

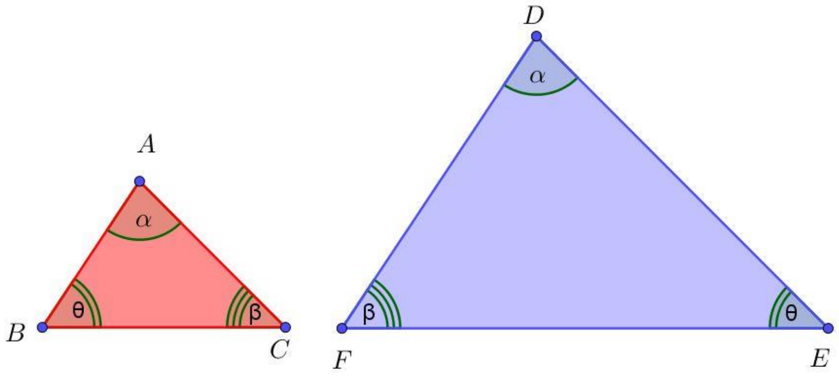
Fonte: Autores (2022).

7° Momento: Semelhança entre triângulos e exercício (25 min).

No próximo momento, antes das atividades finais, vamos apresentar brevemente sobre a semelhança entre triângulos. Esse conteúdo foi escolhido por ser um dos que mais estão presentes em questões de vestibulares que envolvem triângulos. Após 15 minutos explicando esse conteúdo, vamos dar um exercício para resolverem, separaremos um tempo de 10 minutos para eles resolverem e cinco minutos para resolvermos no quadro.

Semelhança entre triângulos: Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando eles possuem os mesmos ângulos internos e existe uma proporção entre os lados correspondentes nos dois triângulos.

Figura 44: Triângulos semelhantes.



Fonte: Autores (2022).

A proporção entre as medidas dos lados é dada por

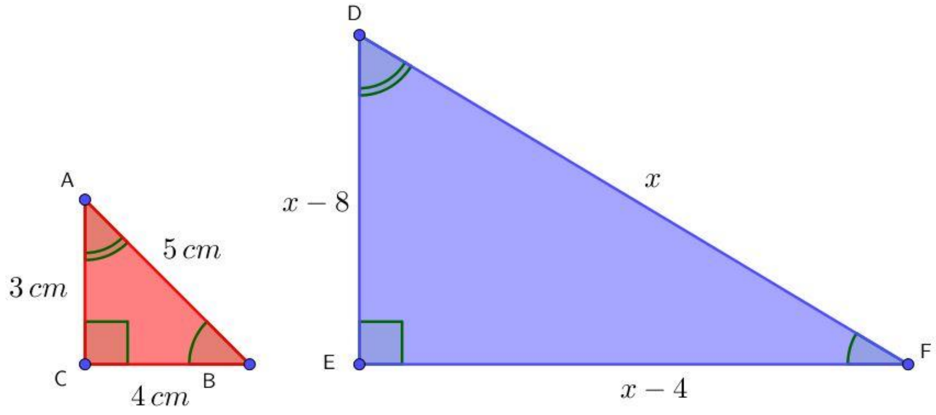
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k,$$

sendo k a razão de semelhança. Note que os numeradores são os lados do triângulo menor enquanto em cada denominador está o respectivo lado do triangulo maior que possuí os mesmos dois ângulos que o lado do triangulo menor. Pode ser feito também ao contrário, contanto que os lados sejam correspondentes, possuindo os mesmos dois ângulos.

Exercício:

Sabendo que os dois triângulos abaixo são semelhantes, determine a medida dos lados $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ e $\overline{EF}$.

Figura 45: Ilustração exercício de triângulos semelhantes.



Fonte: Autores (2022).

8° Momento: Atividades de geometria de triângulos e suas resoluções. (40 min)

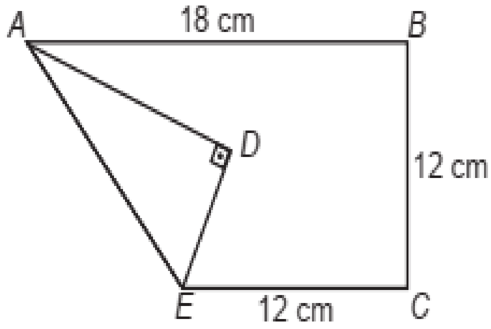
Para encerramento da aula, pediremos que resolvam os dois últimos problemas da segunda lista de resumo. O primeiro problema foi escolhido para trabalhar com o teorema de Pitágoras e no desenvolvimento da visão geométrica, já o segundo problema foi escolhido por abordar os tipos de triângulos e a soma de seus ângulos internos. Passaremos de mesa em mesa novamente, tirando dúvidas e observando suas anotações. Um tempo de 20 minutos será dado para resolverem.

Em seguida, convidaremos alguns alunos para exporem suas resoluções oralmente, enquanto um estagiário as escreverá no quadro, corrigindo a questão. Um tempo de 20 minutos será separado para essa parte, caso não dê para terminar as correções nessa aula, será gravado um vídeo da resolução das atividades sendo o mesmo postado no grupo do *Whatsapp*.

Atividades finais

1) (ENEM – 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Figura 46: Origami problema um.



Fonte: ENEM 2019.

Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é

a) $2\sqrt{22}\ cm$.

b) $6\sqrt{3}\ cm$.

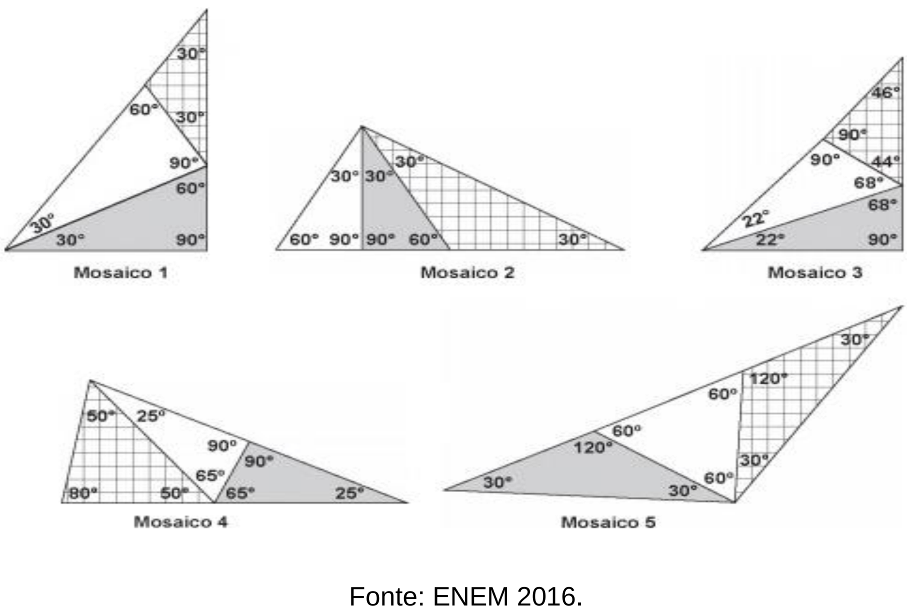
c) $12\ cm$.

d) $6\sqrt{5}\ cm$.

e) $12\sqrt{2}\ cm$.

2) (ENEM - 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isóscele. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

Figura 47: Mosaicos problema dois.



Fonte: ENEM 2016.

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1.

b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos e na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referências:

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

ENEM 2016 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 11 abr. 2022.

ENEM 2018 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 11 abr. 2022.

ENEM 2019 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 11 abr. 2022.

ENEM 2021 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 11 abr. 2022.

GOUVEIA, Rosimar. Retas Paralelas. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/retas-paralelas/. Acesso em: 11 abr. 2022.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática** : 8°ano : ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo, Editora FTD, 2018.

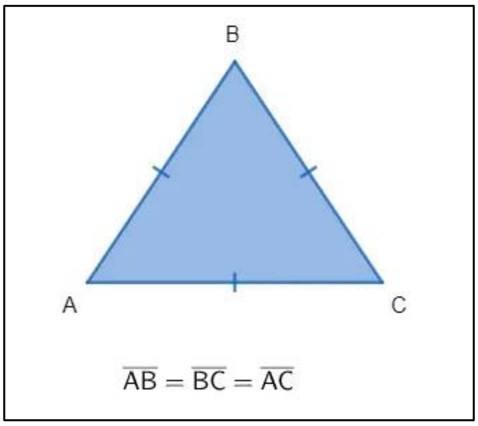
LUIZ Robson. Classificação de triângulos. **UOL.** Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/classificacao-triangulos.htm. Acesso em: 16, abril de 2022.

SILVA, Daniel Duarte da. Semelhança de triângulos. **Info escola**. Disponível: https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/. Acesso em: 11 abr. 2022.

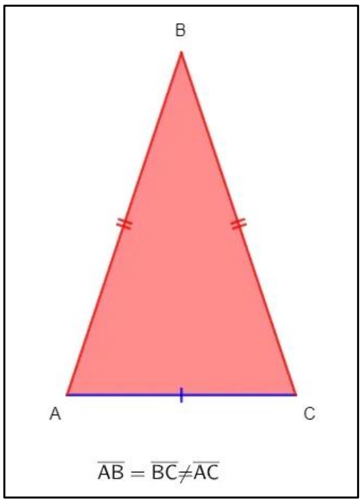
SILVA, Luiza Paulo Moreira. Triângulos. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/amp/matematica/triangulos.htm. Acesso em: 11 abr. 2022.

ANEXO:

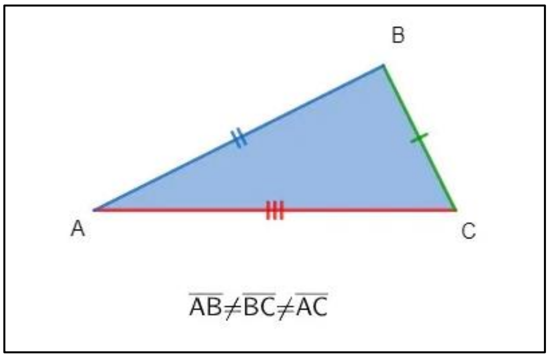
A)


B
A
C
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

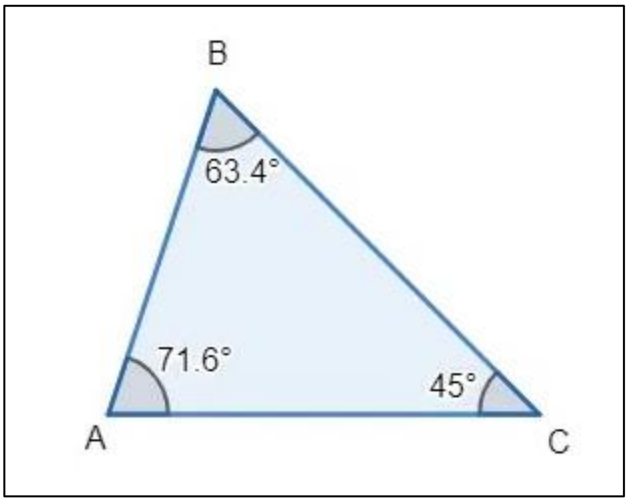
B)


B
A
C
$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$

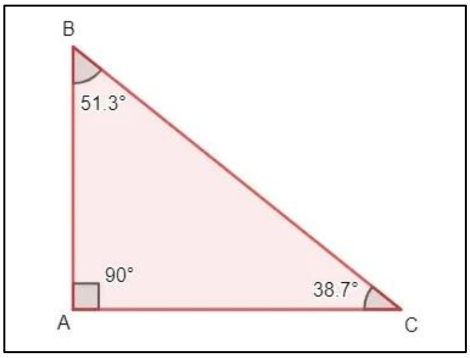
C)


B
A
C
$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

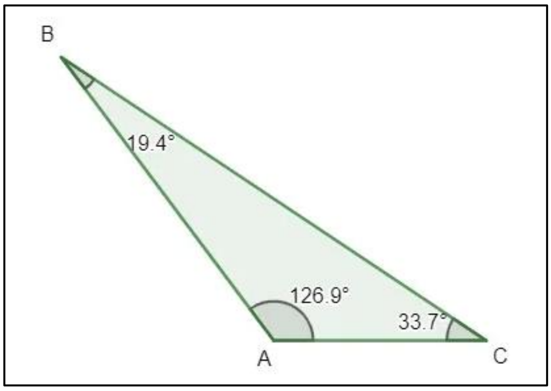
D)



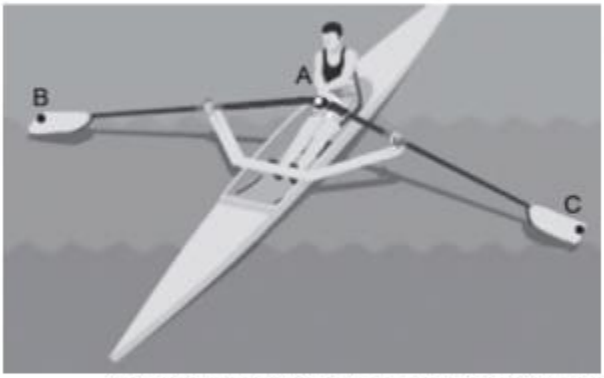
E)



F)

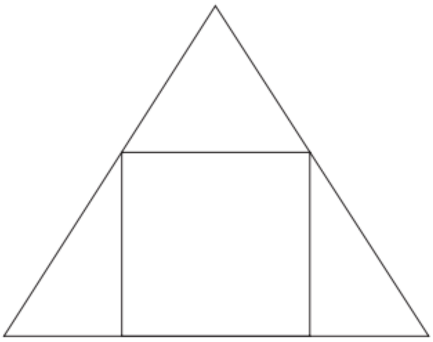


G)

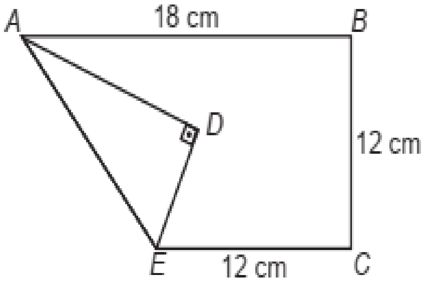


Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

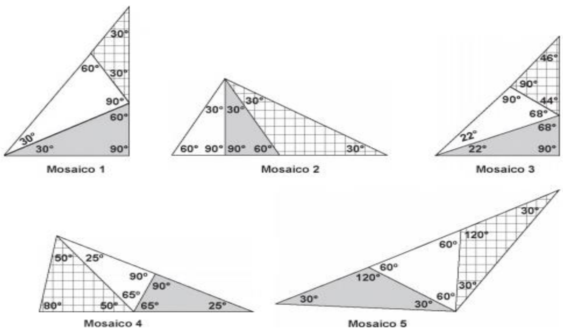
H)



I)

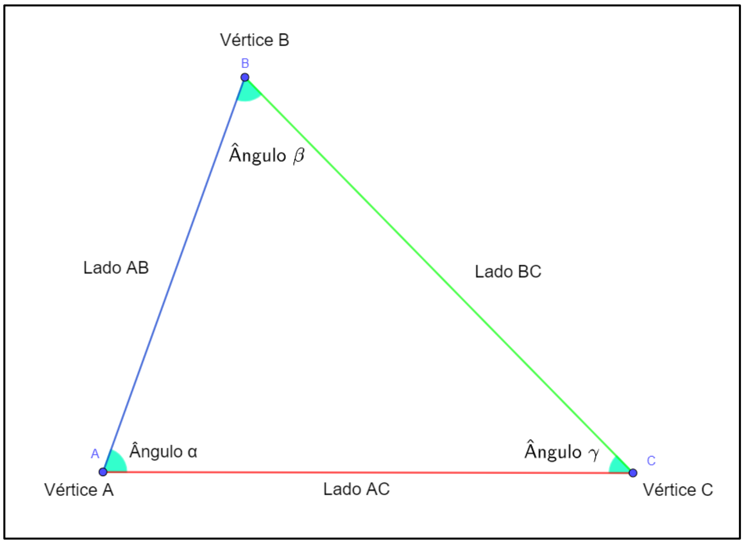


J)

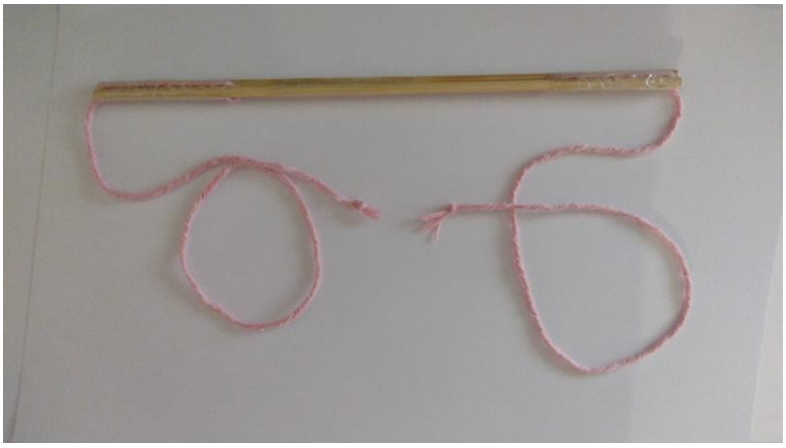


Apêndices:

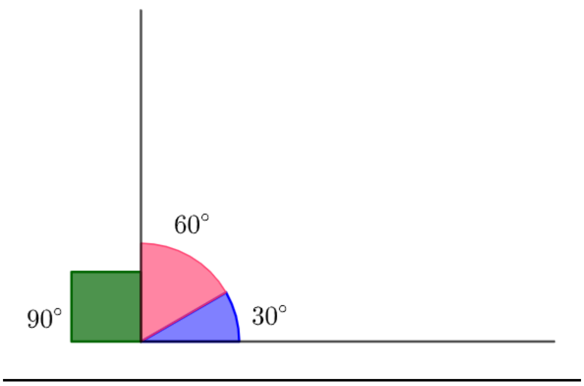
A)



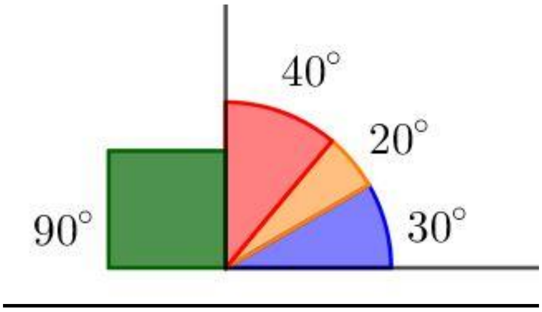
B)



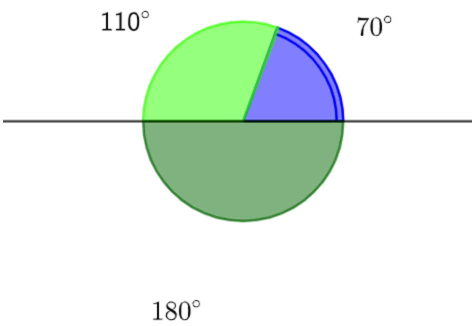
C)



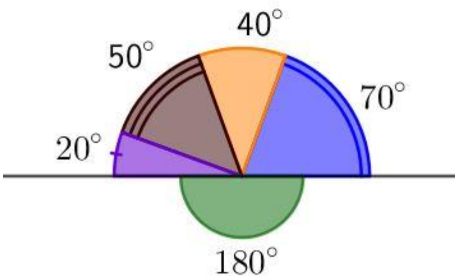
D)



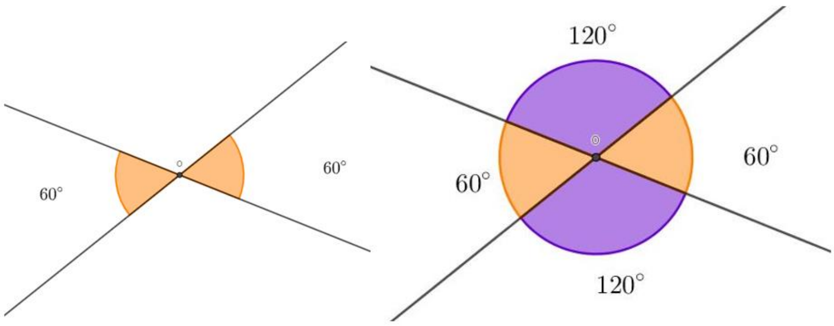
E)



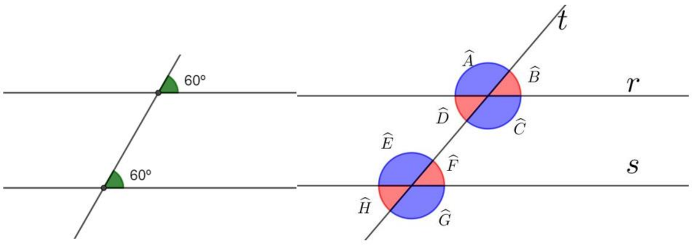
F)



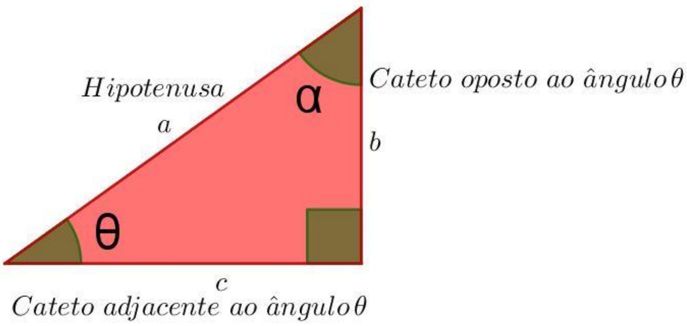
G)



H)



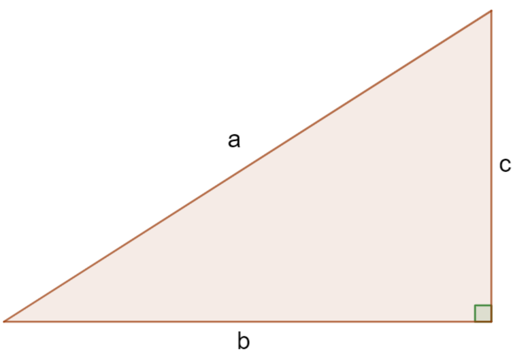
I)



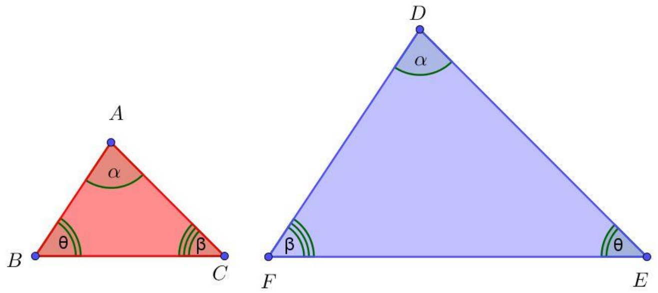
J)

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

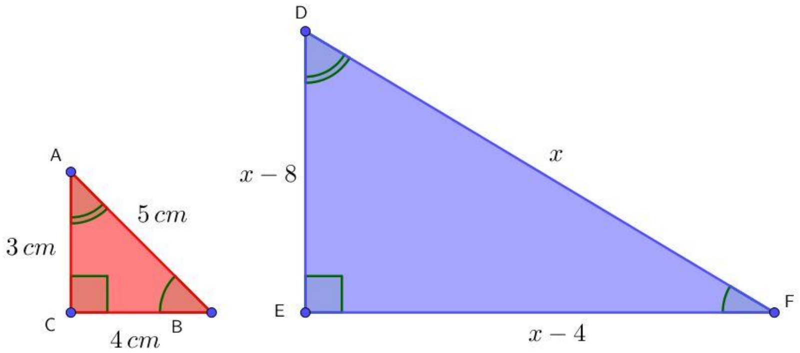
K)



L)


A
α
B
θ
β
C
D
α
β
θ
F
E

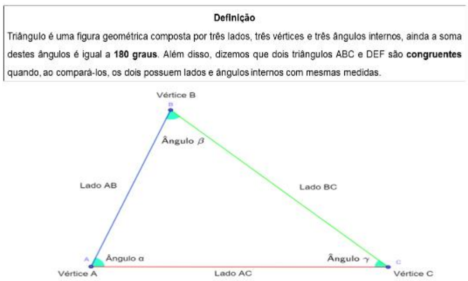
M)

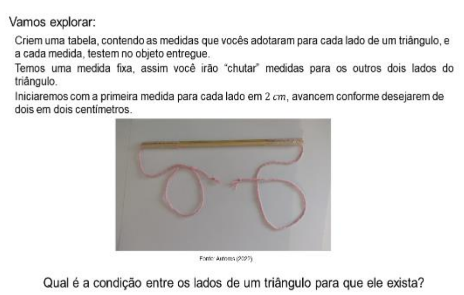

D
A
$x-8$
x
$5\,cm$
$3\,cm$
E
F
C
B
$4\,cm$
$x-4$

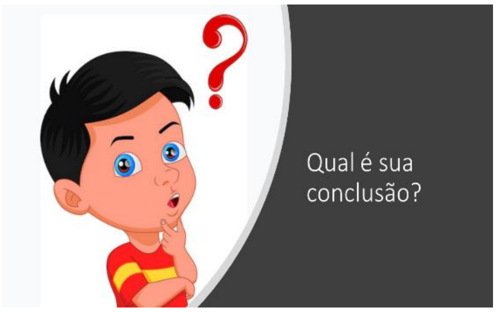
N)

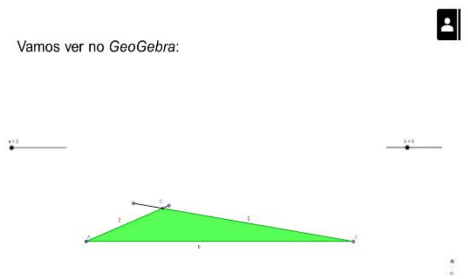
O)

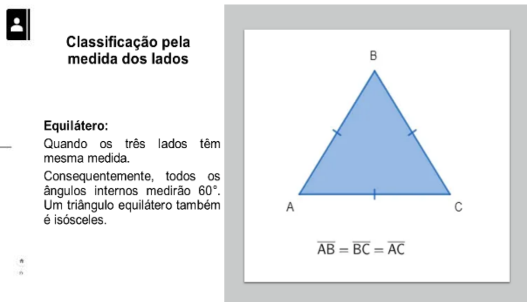

PROMAT – 8 ENCONTRO
Geometria de triângulos.
Professores Estagiários: André Luiz Z. da C.; Cleison R. Sotel e William Felipe de O. P.
Professora Orientadora: Arleni Elise S. L.


Definição
Triângulo é uma figura geométrica composta por três lados, três vértices e três ângulos internos, ainda a soma destes ângulos é igual a 180 graus. Além disso, dizemos que dois triângulos ABC e DEF são congruentes quando, ao compará-los, os dois possuem lados e ângulos internos com mesmas medidas.
Vértice B
Ângulo β
Lado AB
Lado BC
Ângulo α
Ângulo γ
Vértice A
Lado AC
Vértice C

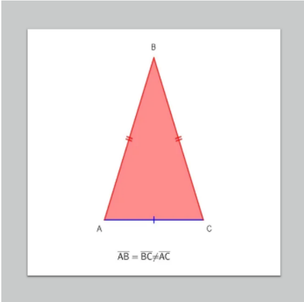

Vamos explorar:
Criem uma tabela, contendo as medidas que vocês adotaram para cada lado de um triângulo, e a cada medida, testem no objeto entregue.
Temos uma medida fixa, assim você irão "chutar" medidas para os outros dois lados do triângulo.
Iniciaremos com a primeira medida para cada lado em 2 cm, avancem conforme desejarem de dois em dois centímetros.
Qual é a condição entre os lados de um triângulo para que ele exista?


Qual é sua conclusão?

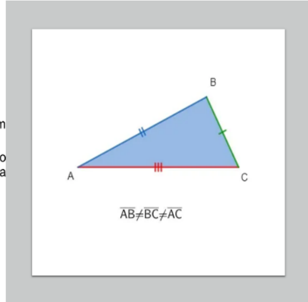

Vamos ver no GeoGebra:


Classificação pela medida dos lados
Equilátero:
Quando os três lados têm mesma medida.
Consequentemente, todos os ângulos internos medirão 60°. Um triângulo equilátero também é isósceles.
B
A
C
AB = BC = AC

Isósceles:
Quando dois lados têm medidas iguais. Chamamos de base o lado de medida distinta e os dois ângulos da base possuem mesma medida.

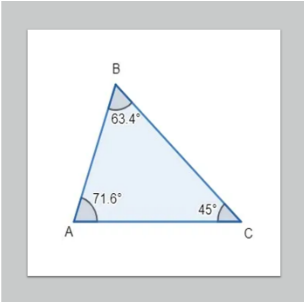


Escaleno:
Quando os três lados têm medidas diferentes.
Consequentemente, cada ângulo interno tem uma medida diferente.

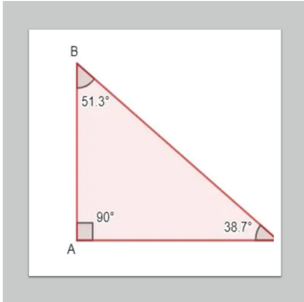


Classificação pela medida dos ângulos internos

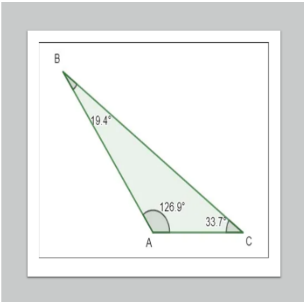
Acutângulo:
Quando os três ângulos internos são agudos (menores que 90°).



Retângulo:
Quando um dos ângulos internos é reto (medida igual a 90°).



Obtusângulo:
Quando um dos ângulos internos é obtuso (a medida é maior que 90° e menor que 180°).



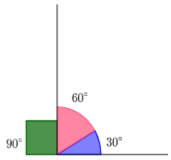
(**ENEM – 2018)** O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.
A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC* cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de 170°.
O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A, B* e *C*, no momento em que o remador está nessa posição, é
A) Retângulo escaleno. B) Acutângulo escaleno. C) Acutângulo isósceles. D) Obtusângulo escaleno.
E) Obtusângulo isósceles.

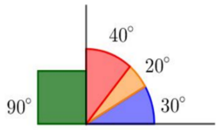
Ângulos complementares

Quando a soma de dois ângulos ou mais resulta em 90º, dizemos que eles são ângulos complementares.

O ângulo de 60º é complementar do 30º ou o ângulo de 30º é complementar do 60º.



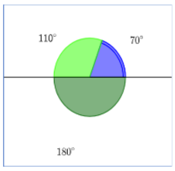
Os ângulos 40°, 20° e 30° são complementares.



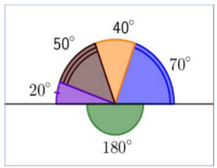
Ângulos suplementares

Quando a soma de dois ângulos ou mais resulta em 180°, dizemos que eles são ângulos suplementares.

Os ângulos 110º e 70º são suplementares.

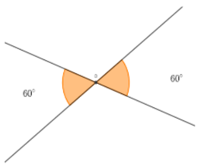


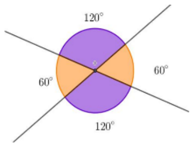
Os ângulos 50°, 20°,40° e 70° são suplementares.



Ângulos opostos pelo vértice

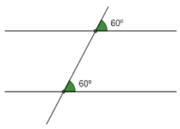
Quando duas retas se cruzam é formado um vértice e quatro ângulos. Quando dois ângulos são opostos pelo mesmo vértice, eles têm a mesma medida.

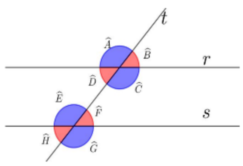




Retas paralelas cortadas por uma transversal

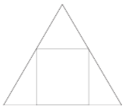
Os ângulos que apresentam a mesma cor são congruentes, ou seja, possuem mesma medida. Dois ângulos de cores diferentes são suplementares, ou seja, somam 180º.





2ª Atividade

(ENEM - 2021) Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.

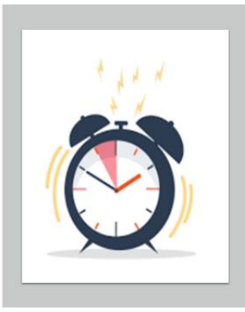


Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede 1 m², qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$).

A) 1,6. B) 2,2. C) 2,4. D) 3,7. E) 6,4.

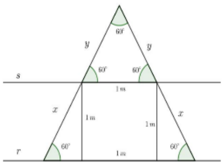
INTERVALO (20 min)

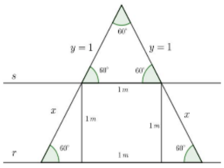
- **9h40min às 10h**



Resolução:

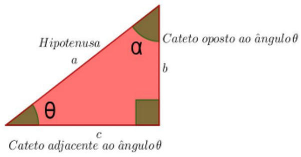
- Sabemos que o triângulo maior é equilátero, então todos os seus ângulos internos medem 60 graus.
- Podemos desenhar duas retas paralelas s e r passando pelos lados do quadrado. Temos que o triângulo na parte superior com possui três ângulos internos de 60 graus, logo ele é equilátero e $y = 1$.

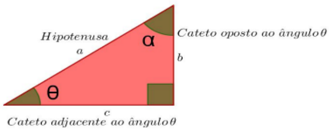




Razões trigonométricas

São resultados de divisões entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo. Elas são capazes de relacionar os lados com os ângulos de um triângulo retângulo. Uma razão trigonométrica relacionada com um determinado ângulo terá um valor fixo para qualquer triângulo, independente do tamanho de seus lados, pois, como eles são proporcionais, a razão entre os lados correspondentes será igual.





Assim, definiremos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo θ, como sendo:

$$Sen\ \theta = \frac{Cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$Cos\ \theta = \frac{Cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

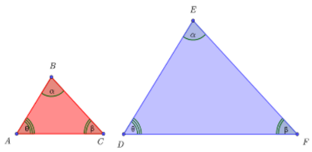
$$Tg\ \theta = \frac{Sen\ \theta}{Cos\ \theta} = \frac{cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \theta}{cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \theta} = \frac{b}{c}$$

Tabela dos ângulos notáveis

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Semelhança entre triângulos

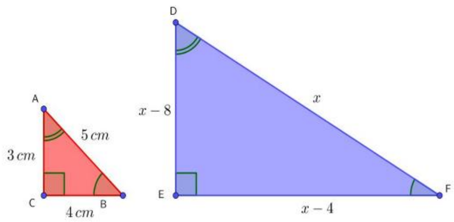
Dizemos que dois triângulos são semelhantes quanto eles possuem os mesmos ângulos internos e existe uma proporção entre os lados correspondentes nos dois triângulos.



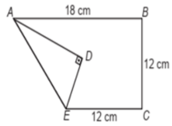
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k$$

Exercício

Sabendo que os dois triângulos abaixo são semelhantes, determine a medida dos lados $\overline{DE}, \overline{DF}$ e $\overline{EF}$.



1) (ENEM – 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é

a) $2\sqrt{22}$ cm.

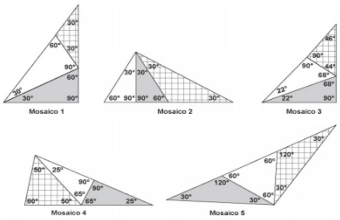
b) $6\sqrt{3}$ cm.

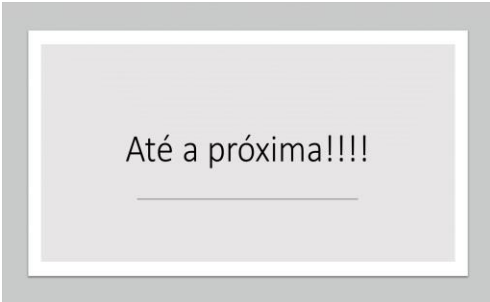
c) 12 cm.

d) $6\sqrt{5}$ cm.

e) $12\sqrt{2}$ cm.

2) (ENEM - 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isóscele. Afigura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

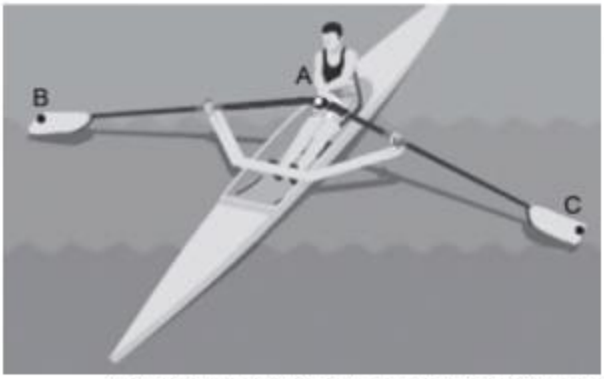




12.1. **Resoluções das atividades;**

1° Atividade

(ENEM – 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.
A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

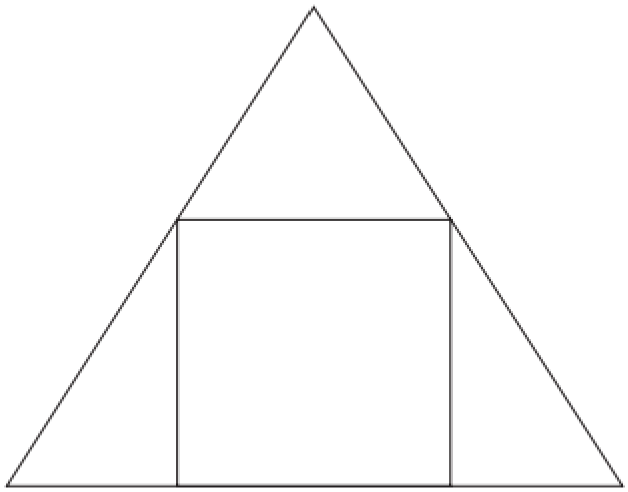
Fonte: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2018/segundo-dia/o-tipo-de-triangulo-com-vertices-nos-pontos-b-e-c-no-momento-em-que-o-remador-esta-nessa-posicao/?cor=azul

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC* cujo ângulo *BÂC* tem medida de 170°.
O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A, B* e *C*, no momento em que o remador está nessa posição, é

f) Retângulo escaleno.
g) Acutângulo escaleno.
h) Acutângulo isósceles.
i) Obtusângulo escaleno.
j) Obtusângulo isósceles.

R) Podemos observar que como os remos são de tamanhos iguais o triângulo formado é classificado como, triângulo isósceles e do fato de termos BÂC=170º ele será e Obtusângulo, Portanto, a resposta é **e) Obtusângulo isósceles.**

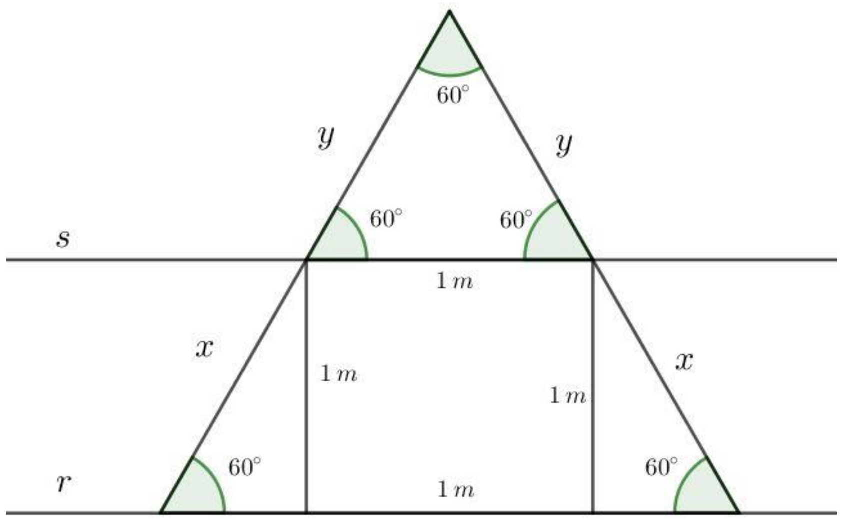
(ENEM - 2021) Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.



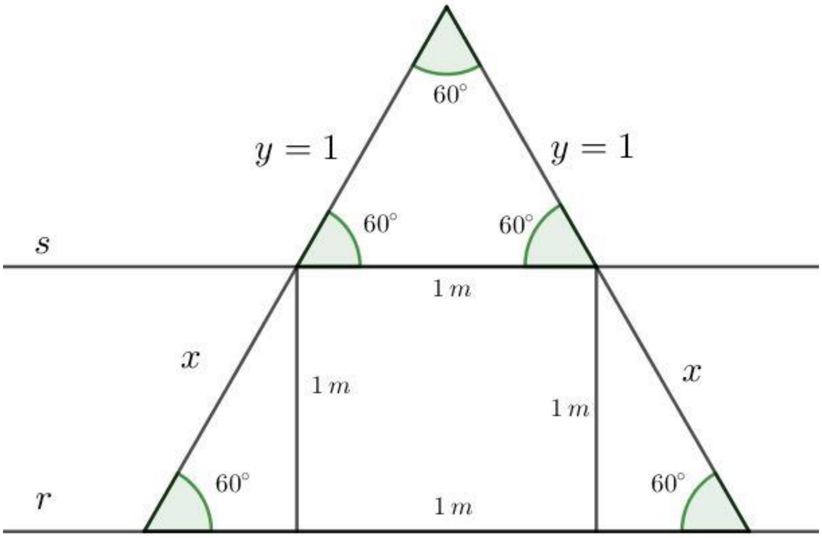
Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede 1 m^2, qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$).

f) 1,6
g) 2,1
h) 2,4
i) 3,7
j) 6,4

R)



Sabemos que o triângulo maior é equilátero, então todos os seus ângulos internos medem 60 graus. Podemos desenhar duas retas paralelas s e r passando pelos lados do quadrado. Temos que o triângulo na parte superior com possui três ângulos internos de 60 graus, logo ele é equilátero e $y = 1$.



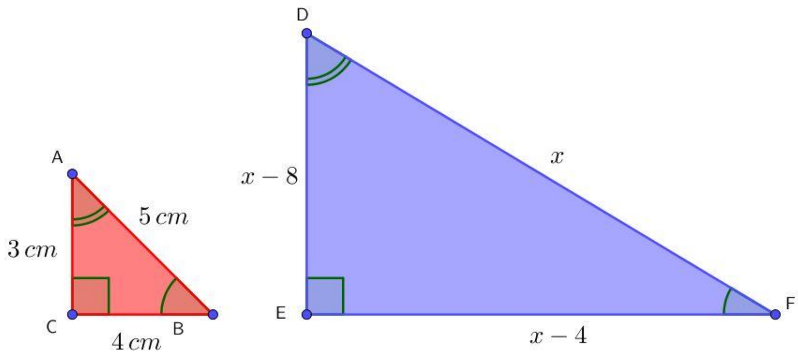
Para encontrar o valor de x, usaremos da relação trigonométrica:

$$seno\ 60º = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x\sqrt{3} = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2*10}{1{,}7*10} = \frac{20}{17} \Rightarrow x = 1{,}17$$

E assim o lado tem medida $x + y = 1{,}17 + 1 = 2{,}17 \cong 2{,}1\ m$ m

Exercício:

Sabendo que os dois triângulos abaixo são semelhantes, determine a medida dos lados $\overline{DE}, \overline{DF}$ e $\overline{EF}$.



R) $\frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k \Rightarrow$

$$\frac{5}{x} = \frac{3}{(x-8)} \Rightarrow$$

$$3x = 5(x - 8) \Rightarrow$$

$$3x = 5x - 40 \Rightarrow$$

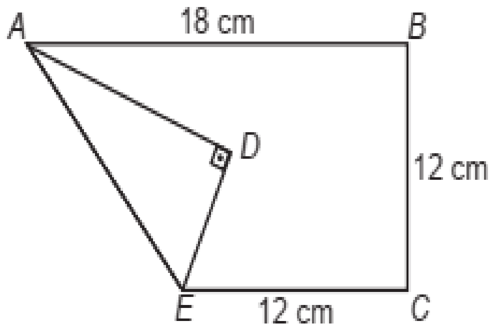
$$-2x = -40 \Rightarrow$$

$\overline{DF} = x = 20$ $\overline{DE} = x - 8 = 12$ $\overline{EF} = x - 4 = 16$

Atividades finais

3) (ENEM – 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Figura 48: Origami problema um.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é

f) 2 √22 cm.
g) 6√3 cm.
h) 12 cm.
i) 6 √5 cm.
j) 12√2 cm.

R: Como foi realizado a dobradura do papel, podemos observar que $\overline{AD} = 12\ cm$ e $\overline{DE} = 6\ cm$ que é a diferença que falta para completar os $18\ cm$ de $\overline{CD}$. Logo, a medida do lado AE pode ser encontrada pelo teorema de Pitágoras, uma vez que sabemos que ADE é um triângulo retângulo e conhecemos o valor dos dois catetos. Então,

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 => \overline{AE}^2 = 12^2 + 6^2 => \overline{AE}^2 = 144 + 36$$

Para retirar a potência de dois do segmento $\overline{AE}$, aplicamos a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade.

$$\sqrt{\overline{AE^2}} = \sqrt{144 + 36}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{180}$$

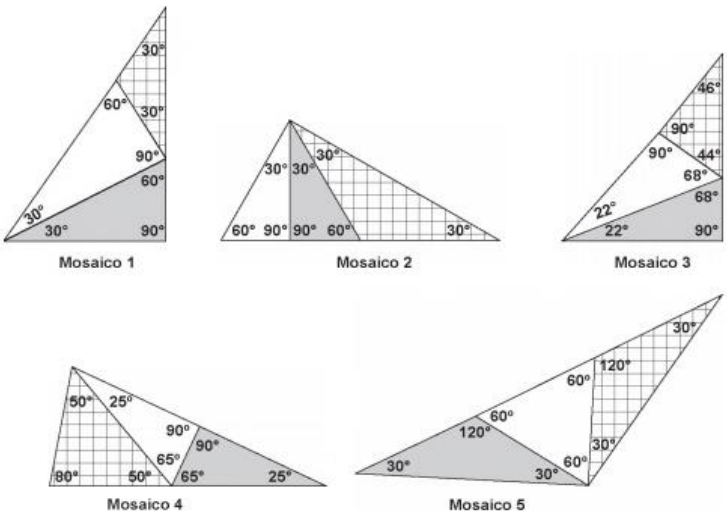
Devemos agora fatorar o 180 para encontrar a alternativa correta.

$$\overline{AE} = \sqrt{3^2 * 2^2 * 5}$$

$$\overline{AE} = 3 * 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\ cm$$

(ENEM - 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isóscele. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

Figura 49: Mosaicos problema dois.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

f) 1.

g) 2.

h) 3.

i) 4.

j) 5.

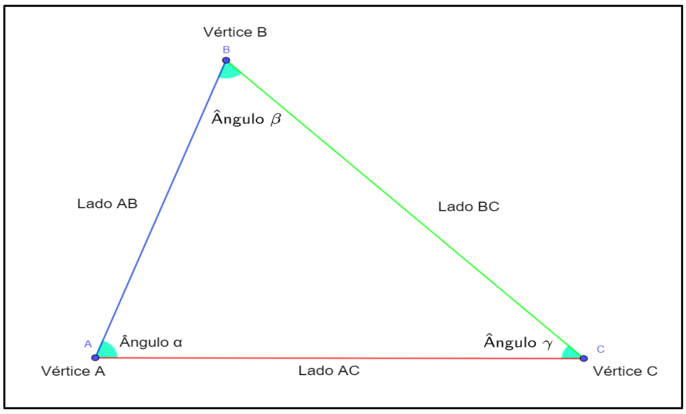
R: Os mosaicos 4 e 5 de imediato já podem ser excluídos porque não são triângulos retângulos. No mosaico 3, por mais que possua um ângulo interno de 90 graus, a soma dos ângulos internos em determinados subtriângulo em sua composição dá um valor diferente de 180°. Temos apenas os mosaicos n°1 e n° 2 , o problema fala que os dois subtriângulos no interior do maior devem ser congruentes, isto é, ter todos os lados e todos os ângulos medindo o mesmos comprimentos, mas se isso ocorre o mosaico n°1 deve ser eliminado já que um dos catetos de um dos subtriângulo retângulo for igual a hipotenusa do outro subtriangulo retângulo. Logo, o mosaico n° 2 é a solução.

12.2. **Material entregue aos alunos;**

Definição: Triângulo é uma figura geométrica composta por três lados, três vértices e três ângulos internos, ainda a soma destes ângulos é igual a 180 graus. Além disso, dizemos que dois triângulos ABC e DEF são congruentes quando, ao compará-los, os dois possuem lados e ângulos internos com mesmas medidas.

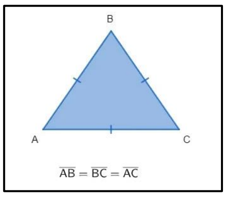
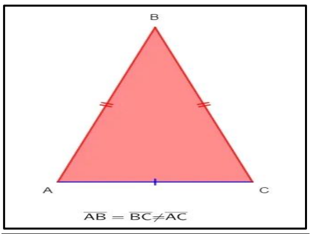
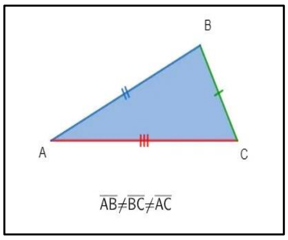
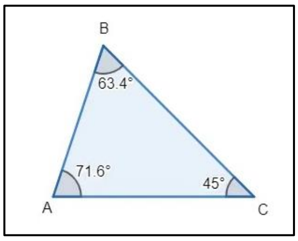
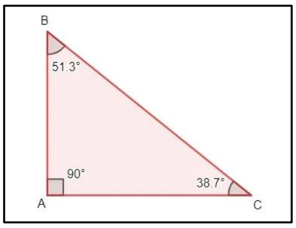
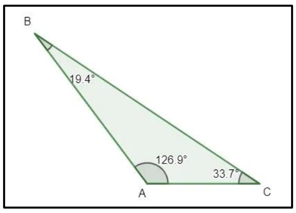
Desigualdade Triangular: A soma de dois dos lados de um triângulo deve ser maior que o terceiro lado

Figura 50: Ilustração de triângulo.



Fonte: Autores (2022).

Classificação pela medida dos lados		
Equilátero	**Isósceles**	**Escaleno**

<table>
<tr>
<td>Quando os três lados têm mesma medida. Consequentemente, todos os ângulos internos medem 60°. Um triângulo equilátero também é isósceles.
Figura 51: Triângulo equilátero

</td>
<td>Quando dois lados têm medidas iguais. Chamamos de base o lado de medida distinta e os dois ângulos da base possuem mesma medida.
Figura 52: Triângulo isósceles.

</td>
<td>Quando os três lados têm medidas diferentes. Consequentemente, cada ângulo interno tem uma medida diferente.
Figura 53: Triângulo escaleno.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Classificação pela medida dos ângulos internos</td>
</tr>
<tr>
<td>Acutângulo</td>
<td>Retângulo</td>
<td>Obtusângulo</td>
</tr>
<tr>
<td>Quando os três ângulos Internos são agudos (menores que 90°).
Figura 54: Triângulo acutângulo.

</td>
<td>Quando um dos ângulos internos é reto (medida igual a 90°).
Figura 55: Triângulo retângulo.

</td>
<td>Quando um dos ângulos internos é obtuso (a medida é maior que 90° e menor que 180°).
Figura 56: Triângulo obtusângulo.

</td>
</tr>
</table>

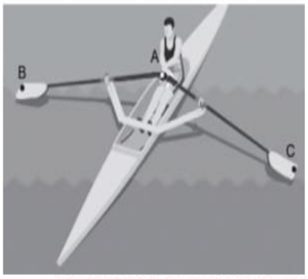
1° Atividade

(ENEM – 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Figura 57: Ilustração atividade 1, caiaque com remo.

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC* cujo ângulo *BÂC* tem medida de 170°.
O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A, B* e *C*, no momento em que o remador está nessa posição, é:

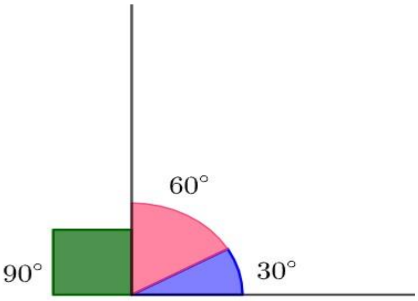


Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

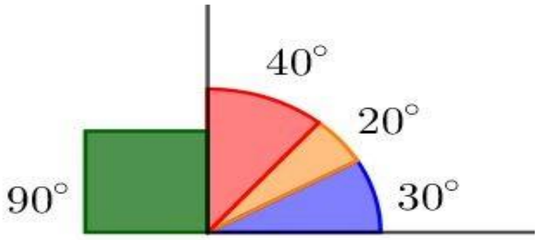
a) Retângulo escaleno. b) Acutângulo escaleno. c) Acutângulo isósc
d)Obtusângulo escaleno. e) Obtusângulo isósceles.

Ângulos complementares: Quando a soma de dois ângulos ou mais resulta em 90º, dizemos que eles são ângulos complementares.

O ângulo de 60º é complementar do 30º ou o ângulo de 30º é complementar do 60º.

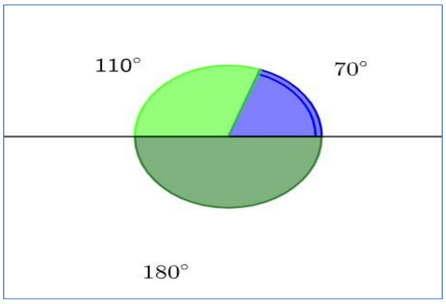


Os ângulos 40 °, 20° e 30° são complementares .

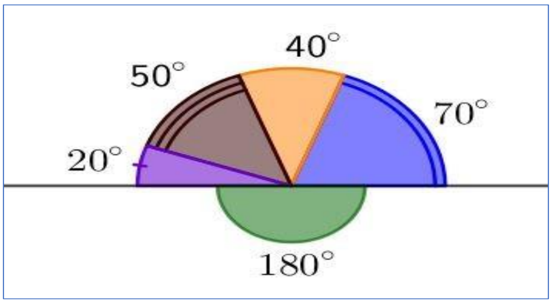


Ângulos suplementares: Quando a soma de dois ângulos ou mais resulta em 180°, dizemos que eles são ângulos suplementares

Os ângulos 110º e 70º são suplementares .

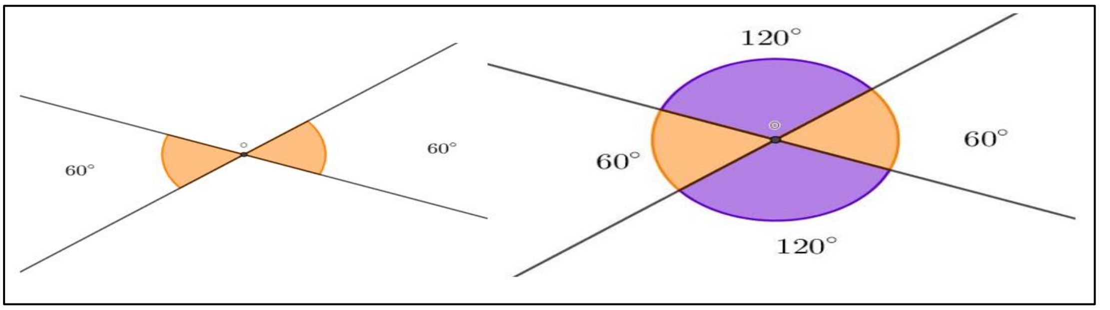


Os ângulos 40 °, 20° e 30° são suplementares .



Ângulos opostos pelo vértice: Quando duas retas se cruzam é formado um vértice e quatro ângulos. Quando dois ângulos são opostos pelo mesmo vértice, eles têm a mesma medida.

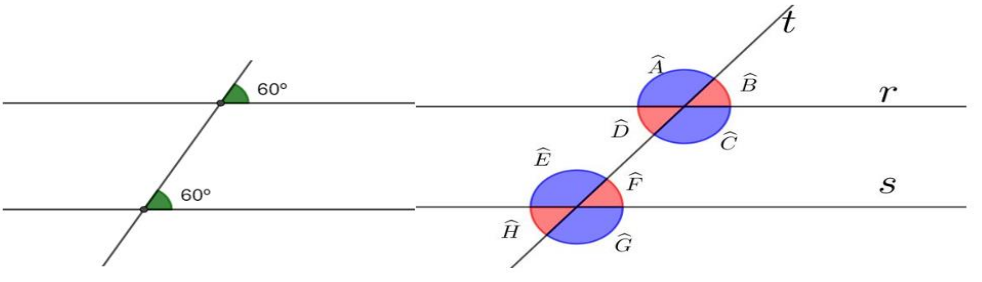
Figura 58: Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: Autores (2022).

Retas paralelas cortadas por uma transversal: Quando duas retas paralelas s e r são ambas cortadas por uma reta transversal t, será formado ângulos como os representados abaixo. Na figura, os ângulos que apresentam a mesma cor são congruentes, ou seja, possuem mesma medida. Dois ângulos de cores diferentes são suplementares, ou seja, somam 180º.

Figura 59: Exemplos de retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: Autores (2022).

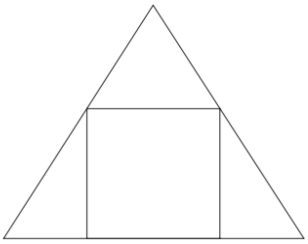
2° Atividade

(ENEM - 2021) Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.

Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede 1 m^2, qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$).

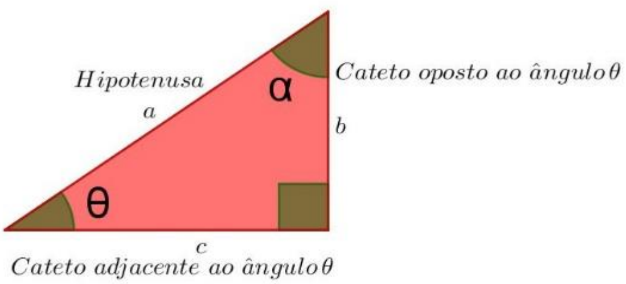
A)1,6. B)2,2. C)2,4. D)3,7. E)6,4.

Figura 60: Ilustração atividade um.



Razões trigonométricas: São resultados de divisões entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo. Elas são capazes de relacionar os lados com os ângulos de um triângulo retângulo. Uma razão trigonométrica relacionada com um determinado ângulo terá um valor fixo para qualquer triângulo, independentemente do tamanho de seus lados, pois, como eles são proporcionais, a razão entre os lados correspondentes será igual.

Figura 61: Trigonometria em um triângulo retângulo.



$$Sen\ \theta = \frac{Cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$Cos\ \theta = \frac{Cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$Tg\ \theta = \frac{Sen\ \theta}{Cos\ \theta} = \frac{cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \theta}{cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \theta} = \frac{b}{c}$$

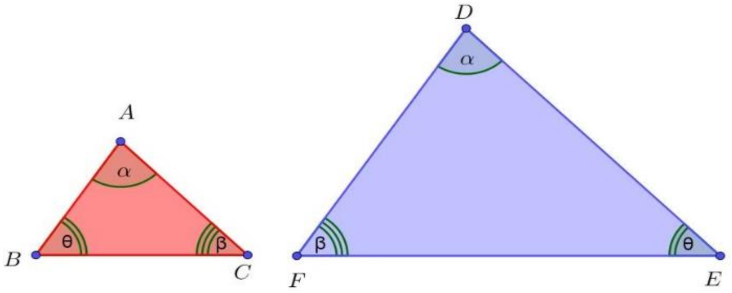
Figura 62: Tabela trigonométrica dos Ângulos notáveis

	30º	**45º**	**60º**
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autores (2022).

Semelhança entre triângulos: Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando eles possuem os mesmos ângulos internos e existe uma proporção entre os lados correspondentes nos dois triângulos.

Figura 63: Triângulos semelhantes.

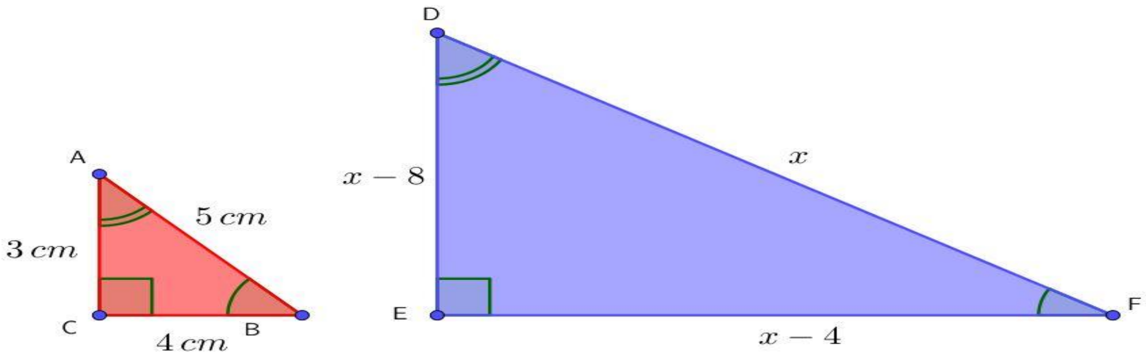


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k$$

sendo k a razão de semelhança. Note que os numeradores são os lados do triângulo menor enquanto em cada denominador está o respectivo lado do triangulo maior que possuí os mesmos dois ângulos que o lado do triangulo menor. Pode ser feito também ao contrário, contanto que os lados sejam correspondentes, possuindo os mesmos dois ângulos.

Exercício: Sabendo que os dois triângulos abaixo são semelhantes, determine a medida dos lados $\overline{DE}, \overline{DF}$ e $\overline{EF}$.

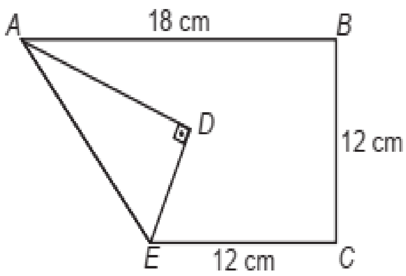
Figura 64: Ilustração exercício de triângulos semelhantes.



Atividades finais

1)(ENEM – 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Figura 65: Origami problema um.

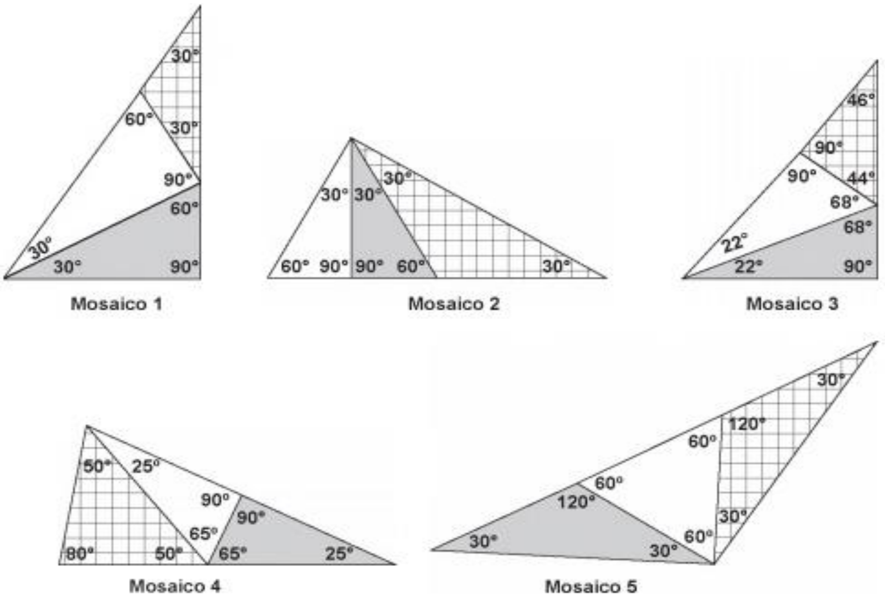


Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é

A)2 √22 cm. B)6√3 cm. C)12 cm. D)6 √5 cm. E)12√2 cm.

2)(ENEM - 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isóscele. Afigura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

Figura 66: Mosaicos problema dois.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

A)1. B)2. C)3. D)4. E)5.

12.3. **Relatório;**

Encontro 8 - 30/04/2022

Relatório 8 - Promat- Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia trinta de abril de 2022, sábado, no período da manhã, na sala A103 no bloco das salas de aula na Unioeste de Cascavel-PR, foi realizado o oitavo encontro do Promat. Tivemos a participação de doze alunos, e todos já haviam participado em pelo menos um encontro dos anteriores. Os conteúdos trabalhados foram desigualdade triangular, classificação de triângulos, ângulos complementares, ângulos suplementares, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por uma reta transversal, razões trigonométricas e semelhança entre triângulos. Todos esses conteúdos foram escolhidos por serem os principais conteúdos relacionados a triângulos que caem em vestibulares e no ENEM, segundo nossa pesquisa. Antes de iniciarmos a aula, decidimos já entregar as duas folhas de resumo previstas para esse encontro. As carteiras foram organizadas em grupos de cinco para a realização da atividade inicial e melhor atendimento às dúvidas.

A aula se iniciou às oito horas e dez minutos, com a apresentação da definição de triângulos, explicamos os elementos que compõem um triângulo desenhando um exemplo na lousa, mostramos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° usando o recorte de um triângulo e dobrando seus lados para formar o ângulo raso. E explicamos brevemente o conceito de congruência entre dois triângulos ABC e DEF.

Em seguida, realizamos uma atividade com o propósito de definir, no final dela, a desigualdade triangular. Cada grupo de alunos recebeu um palito com dois barbantes amarados em suas pontas e réguas; eles deveriam fazer nós em cada barbante, iniciando com dois centímetros em cada barbante e depois escolhendo aumentar dois centímetros em cada barbante ou em apenas um.

O objetivo era que anotassem as medidas dos nós e da base (palito) em uma tabela, verificando os casos que haveria a existência de um triângulo ou não, e deduzissem a desigualdade triangular a partir das medições. Um tempo de 40 minutos foi dado para essa atividade, a grande maioria dos estudantes se mostraram interessados em sua realização, mas apenas alguns buscaram criar a tabela, outros não a acharam necessária. Essa atividade foi produtiva, no sentido de terem pesquisado mais a fundo a criação do triângulo, gerando debates entre os integrantes do grupo sobre qual seria a condição procurada.

Após o tempo estipulado, constatou-se que os grupos já estavam chegando bem perto da definição do conceito procurado. Então decidimos explicar para eles a desigualdade triangular usando o *Software Geogebra* como instrumento. Os alunos concordaram com a definição apresentada, dizendo que ela fazia sentido e era bem lógica.

Em seguida, falamos brevemente sobre a classificação dos triângulos, dependendo da medida dos lados e dos ângulos internos. Para verificar se tinham compreendido essas classificações, escolhemos uma questão do ENEM de 2018 que trabalhava especificamente elas. Nesta atividade, os alunos deveriam observar a figura de um atleta de remo de assento que através de seus remos, formava um triângulo com ângulo interno de 170° e com dois lados de mesma medida, eles teriam que identificar o nome desse triângulo entre as alternativas, sendo um triângulo obtusângulo e isósceles. Um tempo de 10 minutos foi separado para essa atividade, a maioria chegou na resposta correta sem ajuda e aqueles que apresentaram alguma dúvida inicial, logo identificaram a resposta correta.

No próximo momento, apresentamos nas lâminas quatro conceitos que julgamos essenciais que aprendessem por conta do envolvimento que possuem com o estudo do triângulo e, na geometria plana em geral, são eles: Ângulos complementares, ângulos suplementares, ângulos opostos pelo vértice e retas paralelas cortadas por uma transversal. Um tempo de 20 minutos foi separado para esses quatro conceitos. Os alunos não apresentaram dúvidas sobre a explicação de cada um deles, tendo até alguns participado na construção desses conceitos, relembrando a definição de retas paralelas e identificando os ângulos correspondentes nas retas paralelas cortadas pela transversal.

Com o objetivo de trabalhar o conceito de retas paralelas cortadas pela transversal e dar início ao estudo de razão trigonométrica, aplicamos uma questão do ENEM de 2021 que necessitava obter a medida do lado do triângulo equilátero, com um quadrado de $1m^2$ de área em seu interior. Ao longo da atividade, precisariam usar seus conhecimentos sobre triângulos equiláteros, utilizar o conceito e retas paralelas cortadas pela reta transversal e ainda usar a razão trigonométrica sobre o ângulo de 60° ou de 30°

. A maioria conseguiu identificar o lado do quadrado e que os ângulos internos do triângulo equilátero maior mediriam $60°$. Mas, boa parte da sala, não conseguiu identificar e utilizar o conceito de retas paralelas cortadas por uma transversal. Isso já era esperado, uma vez que eles não possuem tanta prática com esse conceito, pois ele pouco é trabalhado nas escolas. Com nossa orientação, conseguiram perceber que determinados ângulos eram paralelos aos ângulos internos do triângulo equilátero maior. Por conta do tempo, decidimos já apresentar a resolução da questão, visto que dois já haviam terminado e para os outros só faltava usar o conceito de razões trigonométricas.

Ao apresentarmos a correção dessa atividade, os liberamos para o intervalo e voltamos às dez horas e cinco minutos. No próximo momento, apresentamos a definição de razões trigonométricas e de sua importância por relacionar os lados do triângulo retângulo com seus ângulos internos. Relembramos as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo θ do triângulo retângulo, e se fosse alternado para o segundo ângulo interno presente, α.

Esse foi um momento muito rico em discussões, com os alunos apresentando suas dúvidas de como e em que momento utilizar essas relações. Além disso, junto com eles nossas formas de relembrar das razões trigonométricas e do valor dos ângulos notáveis. Foram gastos aproximadamente, 20 minutos apresentando as definições e discutindo essas relações.

Em seguida, apresentamos a ideia de semelhança entre triângulos, explicamos que dois triângulos seriam semelhantes quando possuíssem os mesmos ângulos internos e existisse uma proporção entre as medidas lados correspondentes nos dois triângulos, explicamos que eles poderiam montar a proporção da maneira que quisessem colocando as medidas do triângulo menor no numerador e do triângulo maior no denominador, podendo alterar essa ordem. Uma pergunta interessante feita nesse momento, foi elaborada por um aluno do primeiro ano da graduação, perguntando se dois triângulos congruentes seriam semelhantes. Explicamos que dois triângulos congruentes possuem ângulos e lados correspondentes com mesmas medidas, resultando na proporção dos lados igual a um, no entanto, dois triângulos eram semelhantes não implica em serem congruentes, pois seus lados podem ter medidas diferentes.

Pedimos então que resolvessem o exercício sobre triângulos semelhantes que havíamos preparado. Neste exercício, temos dois triângulos dados como semelhantes, mas o maior deles apresenta seus valores em função de x, sendo necessário montar a proporção entre os lados e fazer a regra de três com duas das três razões para encontrar o valor de x e, consequentemente, dos lados do triângulo maior. Alguns alunos apresentaram uma dificuldade em o que fazer com a proporção construída, mas com nossa orientação, logo chegaram no valor de x. Um tempo aproximado de 25 minutos foi gasto com a semelhança de triângulos e com o exercício e sua resolução no quadro por nos.

Por fim, pedimos que resolvessem as duas últimas questões da segunda folha de resumo. A primeira é uma questão do ENEM de 2019, que procura saber a medida do maior segmento de uma folha dobrada na realização do origami, sendo necessário aplicar o teorema de Pitágoras, uma vez que esse segmento é a hipotenusa do triângulo retângulo formado com a dobradura. Alguns alunos apresentaram uma dificuldade em resolver a questão por não lembrarem do teorema e nem de como fatorar o radicando na raiz quadrada, então tivemos que relembrá-los. A segunda é uma questão do ENEM de 2016, que pede para identificar quais dos cinco mosaicos apresentados é um triângulo retângulo formado por três triângulos menores, sendo dois deles triângulos retângulos congruentes e o terceiro um triângulo isóscele.

Todos descartaram os triângulos dos mosaicos quatro e cinco por não serem triângulos retângulos. A maioria descartou o triângulo do terceiro mosaico por ele não ter o triângulo isósceles. A sala dividiu as respostas entre os dois primeiros mosaicos, não conseguiram perceber que no primeiro mosaico os dois triângulos retângulos menores não eram congruentes, uma vez que um cateto do primeiro triângulo retângulo tinha mesma medida que a hipotenusa do segundo triângulo retângulo. Após o tempo de 25 minutos para resolverem as duas atividades, uma aluna aceitou o convite de ir resolver a primeira questão no quadro, enquanto a segunda questão foi resolvida por um estagiário.

Podemos afirmar que essa foi uma das aulas que os alunos mais interagirão, acreditamos que isso se deve por conta da atividade inicial de pesquisa em grupo que promoveu interesse aos estudantes sobre os triângulos e pelo conteúdo ser menos algébrico. No decorrer das atividades, verificamos que eles compreenderam os conceitos apresentados, apenas cometendo alguns erros no processo de aplicação na questão por não terem tanta prática.

13. Encontro 9: Plano de aula;

9º Encontro – 30 de abril de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Geometria polígonos.

Objetivo geral: Compreender e calcular a área, a classificação e a nomenclatura de polígonos.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes ao final dessa aula de:

- Objetivamos que os alunos compreendam algumas fórmulas para o cálculo da soma dos ângulos internos e da área de polígonos;
- Entendam sobre a classificação de polígonos e compreendam como classificar em convexos, não convexos, regulares e não regulares;
- Consigam nomear os polígonos de acordo com o número de lados de um polígono.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: Projetor, *Geogebra,* Folhas Sulfites.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que os alunos adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Nessa aula, procuraremos negociar a não utilização da calculadora, com o objetivo de estimular o cálculo mental e o uso de estratégias que facilitem e agilizem os cálculos. Isso se deve ao ENEM e outros vestibulares não permitirem o uso da calculadora.

Os alunos serão organizados em grupo de quatro participantes, facilitando o atendimento às dúvidas. Serão entregues, no decorrer da aula duas listas contendo um resumo da aula, com as principais definições e exemplos, para que os alunos não tenham a necessidade de copiar o conteúdo. Neste encontro não vamos utilizar lâminas do Power Point como orientação, seguindo com a explicação do conteúdo pela lousa e pelas folhas de resumo. Preparamos uma atividade de dedução das fórmulas de área de polígonos utilizando figuras cortadas, então uma quantidade maior de folha sulfite será usada na aula.

1º Momento: Definindo o que é um polígono e sua composição. (15 min)

Polígono: É uma figura fechada plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de reta, reunida com a sua região interna.

Neste momento será trabalhado brevemente sobre o que é um polígono e sua composição e a condição de existência, a partir de exemplos, apresentados em lousa. Ainda falaremos sobre ângulos internos e externos, a partir do exemplo adotado.

Elementos do polígono: Em um polígono qualquer podemos destacar os seguintes elementos:

Vértices: São os pontos $A, B, C, D, e\ E$. Nomeamos de polígono ABCDE**.**

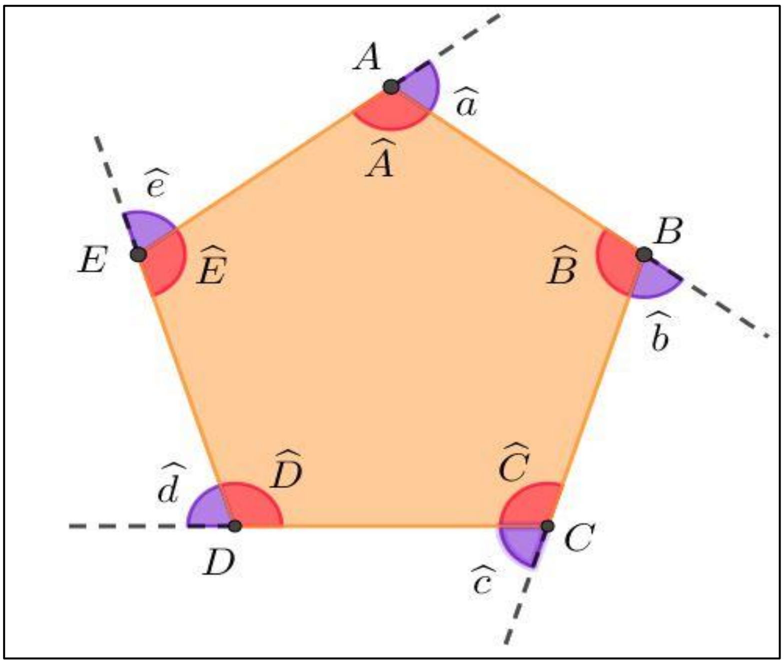
Lados: São os segmentos de retas $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CE}, \overline{DE},$ e $\overline{EA}$.

Ângulos internos: são os ângulos formados por dois lados consecutivos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \widehat{D}\ e\ \hat{E}$.

Diagonais: São os segmentos que unem um vértice a outro vértice não consecutivo, neste caso temos: AC, AD, BD, BE e CE.

Ângulos externos: São os ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento de um lado consecutivo a ele. Neste caso vamos ter: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, d,e\widehat{e}$.

Figura 67: Ilustração de ângulos de polígonos

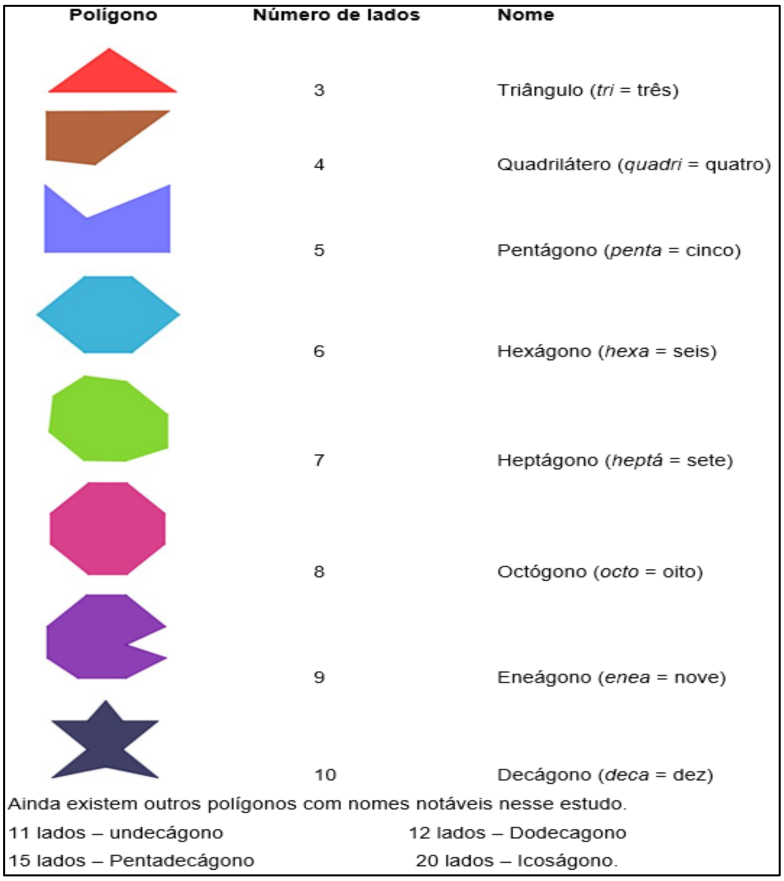


Fonte: Autores (2022).

2º Momento: Nomenclatura a partir dos lados e introdução aos polígonos convexos e não convexos. (30 min)

Independente do polígono possuir todos os seus lados com medidas distintas ou iguais, nomeamos eles a partir da quantidade de lados. Os nomes serão expostos em lousa seguido da representação da figura, como na figura abaixo:

Figura 68: Ilustração de polígonos e nomes.



Polígono	Número de lados	Nome
	3	Triângulo (*tri* = três)
	4	Quadrilátero (*quadri* = quatro)
	5	Pentágono (*penta* = cinco)
	6	Hexágono (*hexa* = seis)
	7	Heptágono (*heptá* = sete)
	8	Octógono (*octo* = oito)
	9	Eneágono (*enea* = nove)
	10	Decágono (*deca* = dez)

Ainda existem outros polígonos com nomes notáveis nesse estudo.

11 lados – undecágono 12 lados – Dodecagono

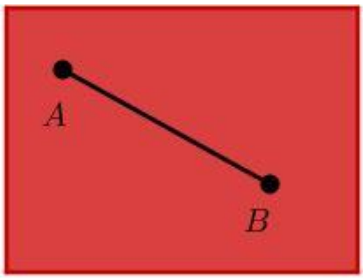
15 lados – Pentadecágono 20 lados – Icoságono.

Fonte: Autores (2022).

Polígonos convexos e não convexo:

Polígonos convexos e não convexos: Um polígono é convexo quando não possui reentrâncias. Em outras palavras, se pudermos construir qualquer segmento com as extremidades A e B no interior do polígono e nenhuma parte desse segmento estiver fora do polígono, então, esse polígono será convexo. Como mostra o exemplo abaixo:

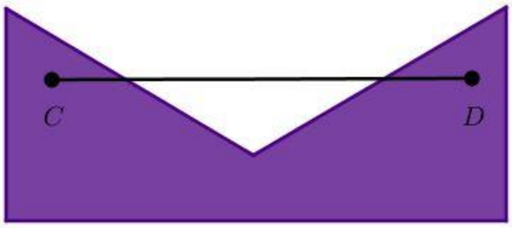
Figura 69: Ilustração de polígono convexo.



Fonte: Autores (2022).

Agora quando for possível construir um segmento com extremidades C e D no interior do polígono e alguma parte desse segmento estiver fora do polígono, então esse polígono é não convexo. Como mostra o exemplo abaixo:

Figura 70: Ilustração de polígono não convexo.



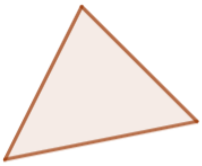
Fonte: Autores (2022).

3º Momento: Soma dos ângulos internos de um polígono convexo e do número de diagonais. (30 min).

Em seguida, vamos levá-los a concluir qual deve ser o ângulo interno de um polígono qualquer apenas formando as diagonais no interior da figura para criar triângulos partindo de um único vértice. Com o conhecimento da aula anterior de que em um triangulo qualquer sempre possuí 180° como soma dos ângulos internos, queremos fazê-los chegar na fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, $S_A = (n-2)180$, com n sendo o número de lados da figura.

Vamos construir uma tabela na lousa decorrer desse estudo, informado a quantidade de lados do polígono, a quantidade de triângulos em que o polígono foi decomposto e a soma das medidas dos ângulos internos.

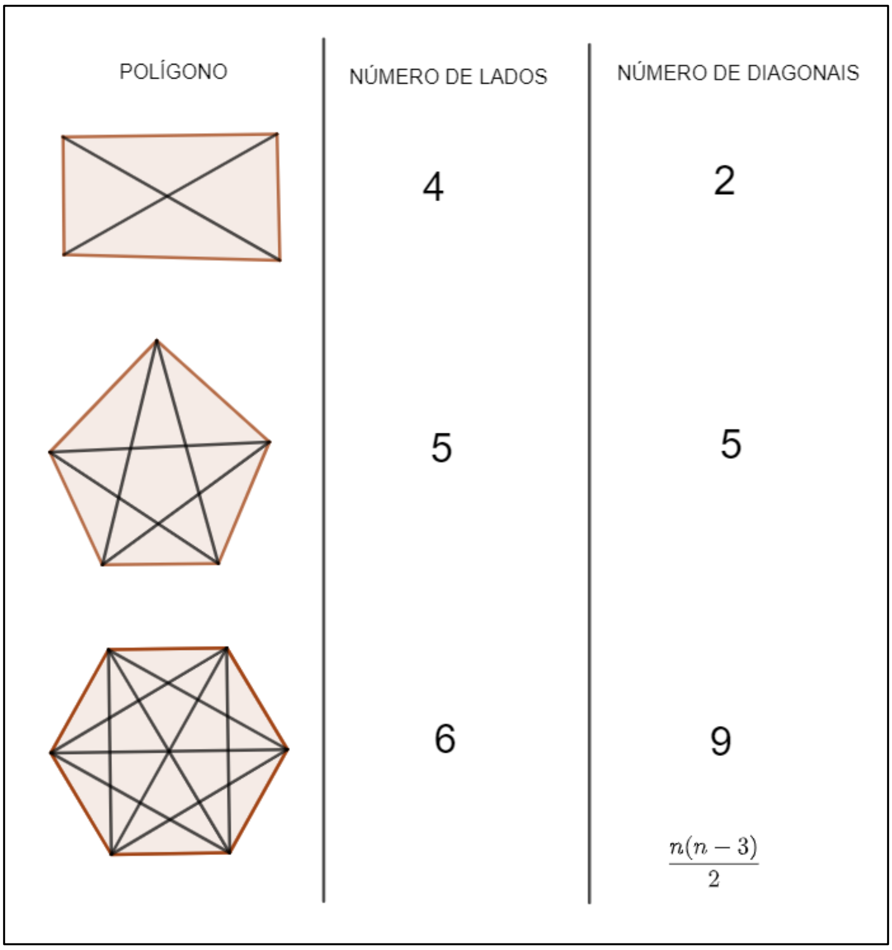
Figura 71: Lados e triângulos de um polígono.

POLÍGONO	LADOS n	TRIÂNGULOS FORMADOS	SOMA DOS ÂNGULOS EM GRAUS
	3	1	1 * 180 = 180
	4	2	2 * 180 = 360
	5	3	3 * 180 = 540
	6	4	4 * 180 = 720
		(n-2)	(n-2)*180

Fonte: Autores (2022).

Vamos aproveitar esse momento para comentar que em qualquer polígono convexo a soma dos ângulos externos é sempre igual à $360°$ e que a quantidade de diagonais em um polígono pode ser dada pela fórmula $D_p = \frac{n(n-3)}{2}$.

Figura 72: Ilustração diagonais de polígonos.



Fonte: Autores (2022).

Vamos explicar que de cada vértice do polígono partem $n-3$ diagonais e como temos n lados que é igual ao número de vértices, vamos ter $n(n-3)$. No entanto, estamos considerando cada diagonal em duplicidade, por isso dividimos por dois.

4º Momento: Problema introdutório e estudo dos polígonos regulares. (25 min)

No próximo momento, vamos introduzir os polígonos regulares e não regulares, aplicando também um problema do ENEM para verem a importância de conhecer as características especificas desses polígonos.

Atividade introdutória 1

(ENEM - 2020) Um estudante, morador da cidade de Contagem, ouviu dizer que nessa cidade existem ruas que formam um hexágono regular. Ao pesquisar em um sítio de mapas, verificou que o fato é verídico, como mostra a figura.

Figura 73: Mapa ruas formam hexágono regular.

Fonte 3: Enem 2020.

Ele observou que o mapa apresentado na tela do computador estava na escala $1 : 20\,000$. Nesse instante, mediu o comprimento de um dos segmentos que formam os lados desse hexágono, encontrando 5 cm.

Se esse estudante resolver dar uma volta completa pelas ruas que formam esse hexágono, ele percorrerá, em quilômetro:

Alternativas

a) 1.

b) 4.

c) 6.

d) 20.

e) 24.

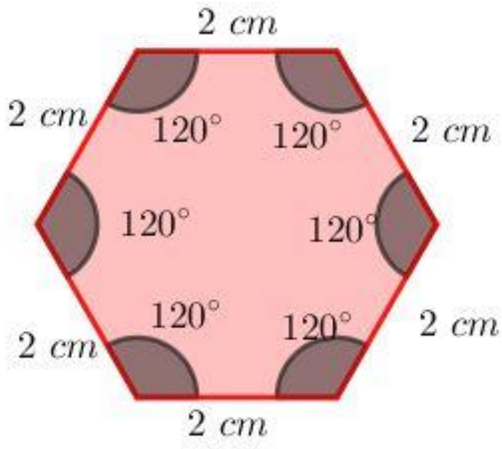
Polígonos regulares e não regulares:

Quando um polígono convexo possui todos os lados com mesma medida e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas, dizemos que ele é um polinômio convexo regular. E caso algum lado ou ângulo possua uma medida diferente dos demais, chamamos o polígono convexo de não regular.

Para calcular a medida do ângulo interno de um polígono convexo regular, basta dividirmos a soma total dos ângulos internos pela quantidade de lados do polígono, isto é, $A_{interno} = \frac{(n-2)180}{n}$. E a medida do ângulo externo seria dado por $A_{externo} = \frac{360}{n}$.

Exemplo:

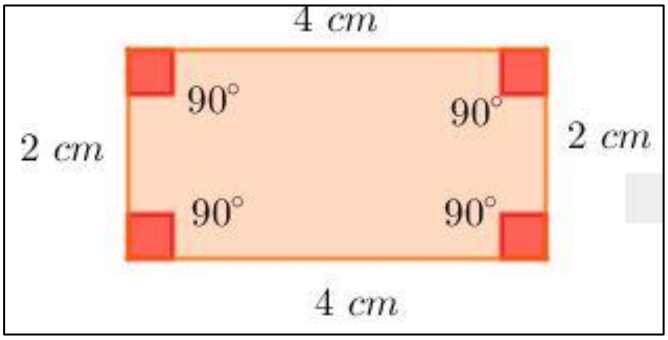
Figura 74: Ilustração de ângulos internos de polígono regular.



Fonte: Autores (2022).

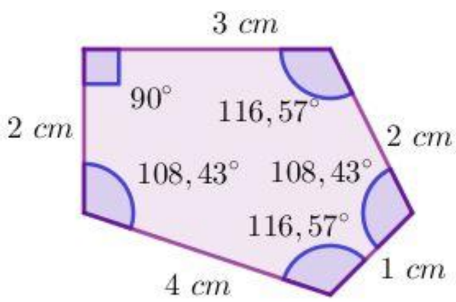
Exemplos de polígonos convexos não regulares

Figura 75: Polígono convexo não regular, retângulo.



Fonte: Autores (2022).

Figura 76: Polígono convexo não regular.



Fonte: Autores (2022).

5º Momento: intervalo. (20 min)

6º Momento: Área de polígonos. (80 min)

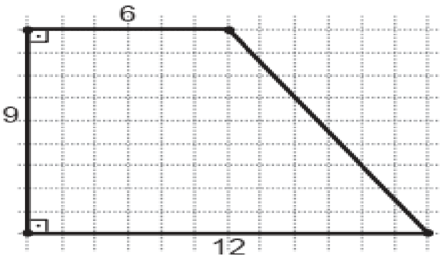
Em seguida, vamos introduzir o estudo sobre área de polígonos através de um problema do ENEM de 2021, segunda fase. Esse problema foi escolhido por ser necessário conhecer o cálculo da área de diferentes polígonos para depois realizar a divisão pela área do círculo que representa os xampus, condicionadores e sabonetes líquidos. A figura que portar um número inteiro de desses três e tiver a menor área será a figura correta.

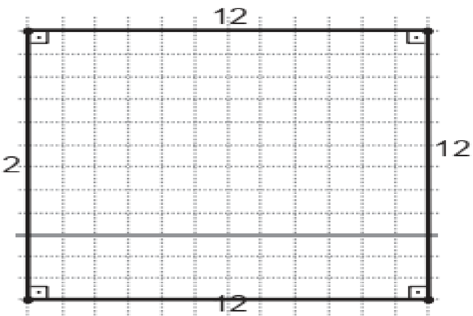
Vamos dar um tempo de 20 minutos para resolverem a atividade, nesse período vamos andar pela sala tirando dúvidas e relembrando eles através de questionamentos como se calcula a área do determinado polígono.

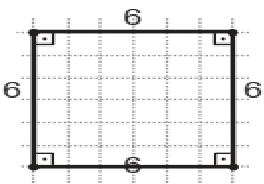
Após esse período, vamos convidar algum aluno para apresentar sua solução oralmente para escrevermos ela no quadro. Caso nenhum aluno queira apresentar a resolução, ela será feita por um estagiário. Um tempo de 15 minutos para sua resolução no quadro.

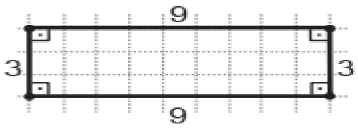
Atividade introdutória 2

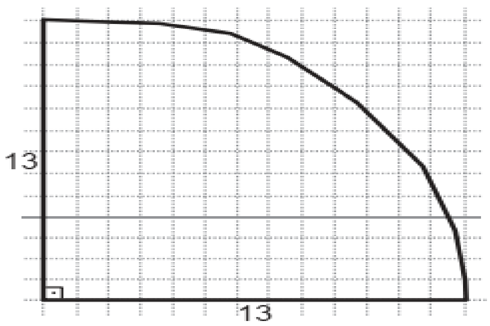
(ENEM – 2021) Um suporte será instalado no box de um banheiro para serem colocados recipientes de xampu, condicionador e sabonete líquido, sendo que o recipiente de cada produto tem a forma de um cilindro circular reto de medida do raio igual a 3 cm. Para maior conforto no interior do box, a proprietária do apartamento decidiu comprar o suporte que tiver a base de menor área, desde que a base de cada recipiente ficasse inteiramente sobre o suporte. Nas figuras, vemos as bases desses suportes, nas quais todas as medidas indicadas estão em centímetro.

I


II


III


IV


V


Utilize 3,14 como aproximação para π.

Para atender à sua decisão, qual tipo de suporte a proprietária comprou?

Alternativas

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

Área de figuras geométricas

Aproveitaremos esse momento para estudar a área das principais figuras planas que aparecem no estudo da geometria. A princípio se trata da área de triângulos e quadriláteros.

Vamos começar relembrando a área do quadrado, do retângulo, seguindo para a área do paralelogramo. Conhecendo a área dessas três figuras iniciais, vamos propor um momento de reflexão sobre a área do triângulo e do losango, perguntando se eles sabem o motivo de sua área ser dada por $A = \frac{b*h}{2}$, se a fórmula vale para todo triângulo, e se altura do triângulo isósceles não fosse conhecida.

Paralelogramo

Uma figura plana recebe o nome de paralelogramo quando:

- Os lados paralelos possuem mesma medida;
- Os ângulos opostos da figura apresentam mesma medida;
- Suas diagonais se encontram em seus pontos médios;

Sua área é dada por $A_{paralelogramo} = base * altura$.

Retângulo

É um paralelogramo com lados opostos paralelos e de mesma medida. Possui quatro ângulos internos de 90 graus e suas diagonais possuem a mesma medida.

Sua área é dada por $A_{retângulo} = base * altura$.

Losango

É um paralelogramo com quatro lados de mesma medida e com suas diagonais formando ângulos de 90 graus (perpendiculares). Sua área é dada por $A_{losango} = \frac{Diagonal\ maior * Diagonal\ menor}{2}$.

Quadrado

É um paralelogramo que apresenta os quatro lados com mesma medida e todos os ângulos internos medem 90 graus. Além disso, as diagonais do quadrado possuem a mesma medida e elas são perpendiculares entre si.

Sua área é dada por $A_{quadrado} = base * base$.

Trapézio

Diferente do paralelogramo, o trapézio é um quadrilátero com um único par de lados paralelos. Esses lados paralelos são chamados de base maior e base menor. Sua área é dada por $A_{trapézio} = \frac{(Base\ maior + Base\ menor)}{2} * altura$.

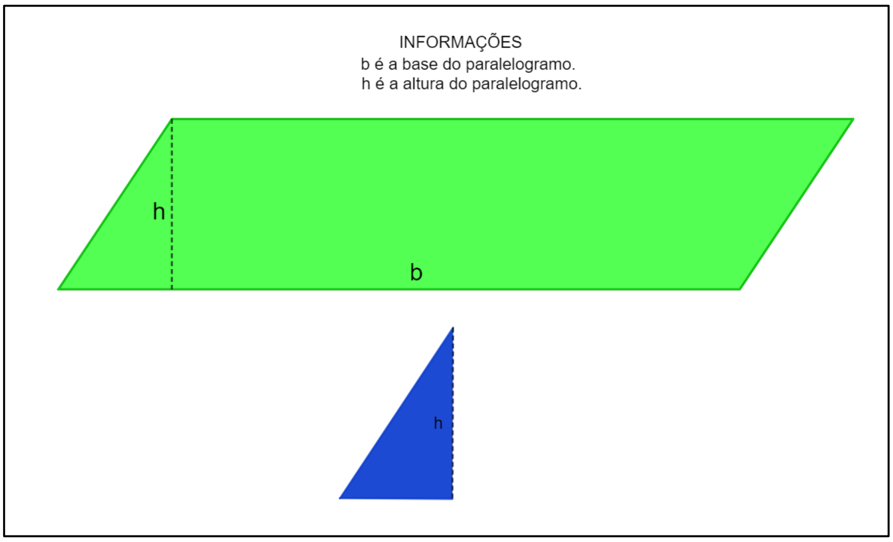
Triângulo

Sua área é dada por $A_{triângulo} = \frac{base * altura}{2}$. Caso se trate de um triângulo isósceles que desconheça a altura, pode-se utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrá-la, sendo ela $h = \frac{\sqrt{4 * lado^2 - base^2}}{2}$. A área do triângulo isósceles é $A_{isósceles} = base * \frac{\sqrt{4 * lado^2 - base^2}}{4}$ e do triângulo equilátero é $A_{equilátero} = lado^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vamos desafiá-los a tentar deduzir a fórmula da figura dada, apenas conhecendo a figura e utilizando das figuras que vamos disponibilizar:

Inicialmente explicada por um estagiário em um caso da área do paralelogramo para que os alunos entendam o processo, utilizando a figura:

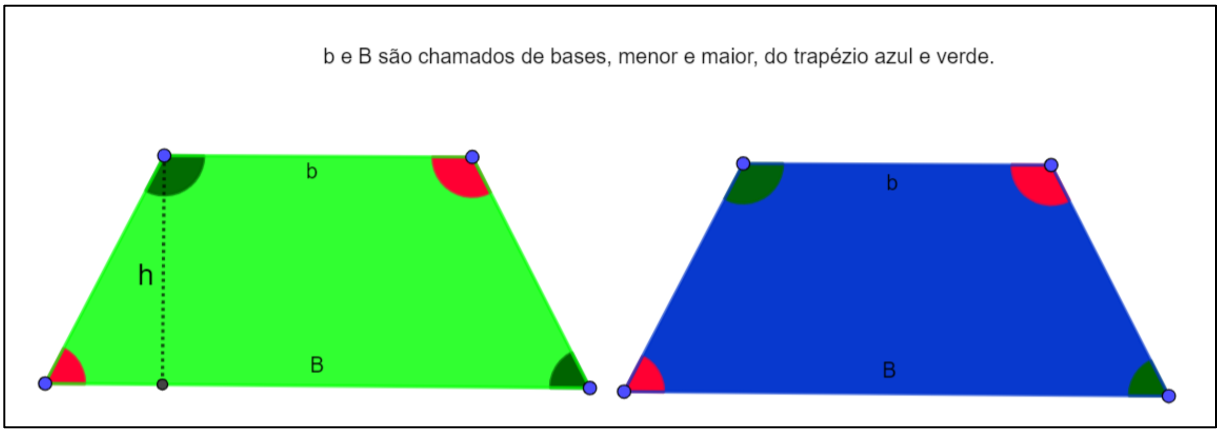
Figura 77: Paralelogramo.



Fonte: Autores (2022).

Ela consistiria em, tendo a disposição figuras impressas que serão usadas na demonstração da fórmula da área de cada figura, os alunos tentaram com elas chegar na fórmula que dê a área do polígono dado. Para cada figura será disponibilizado o material necessário para tal atividade, os alunos deverão recortar as figuras, e em seguida buscar uma maneira de calcular a área da figura, e apresentar a fórmula encontrada, já que as medidas serão dadas algebricamente nas figuras.

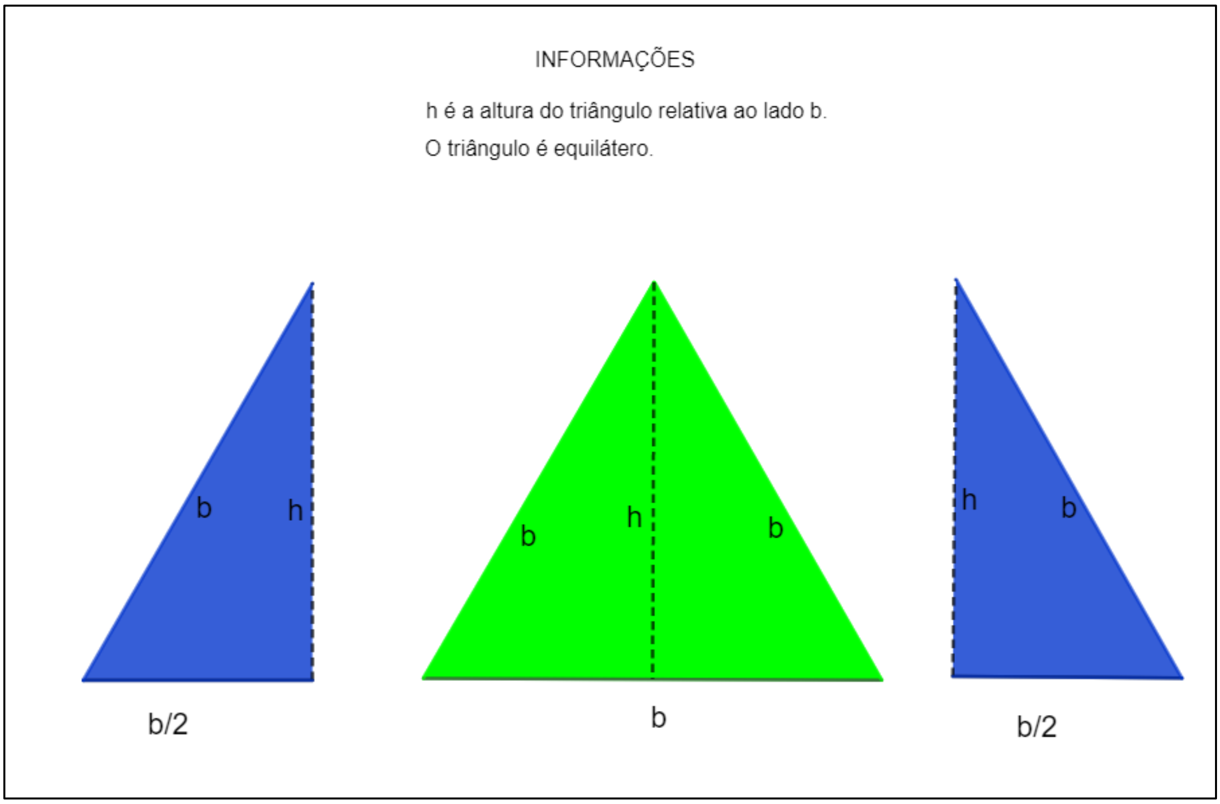
Figura 78: Figura para dedução da fórmula da área do trapézio.



Fonte: Autores (2022).

Esperamos que cheguem na seguinte formula, $A = \frac{(b+B)*h}{2}$, que é a fórmula adotada para calcular a área de um trapézio.

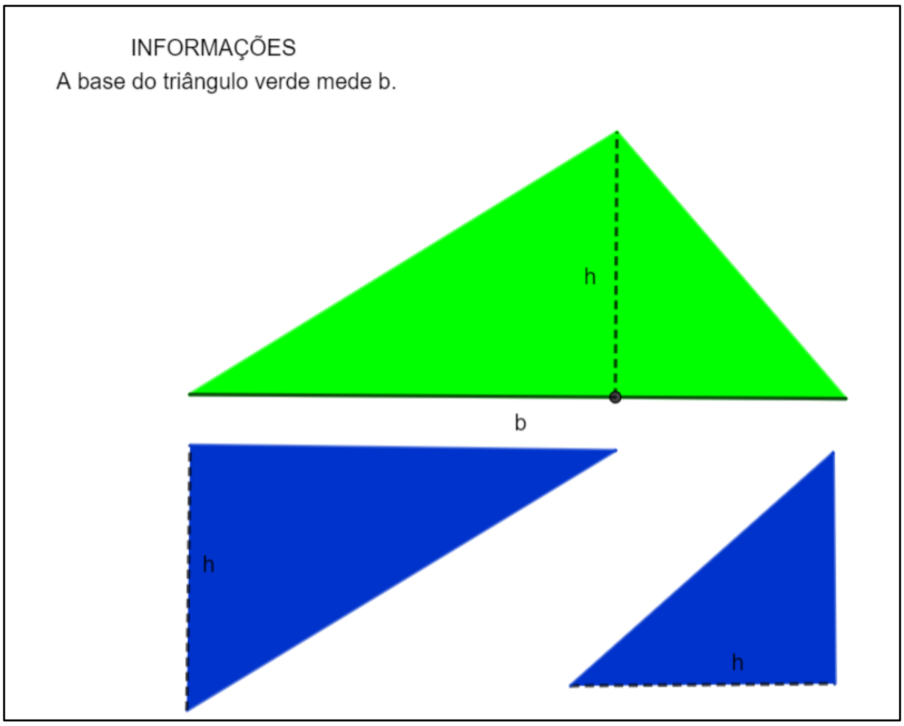
Figura 79: Figura para dedução da fórmula da área do triângulo equilátero.



Fonte: Autores (2022).

Esperamos que cheguem na seguinte formula, $A = \frac{b^2*\sqrt{3}}{4}$, que é a fórmula adotada para calcular a área de um triângulo equilátero.

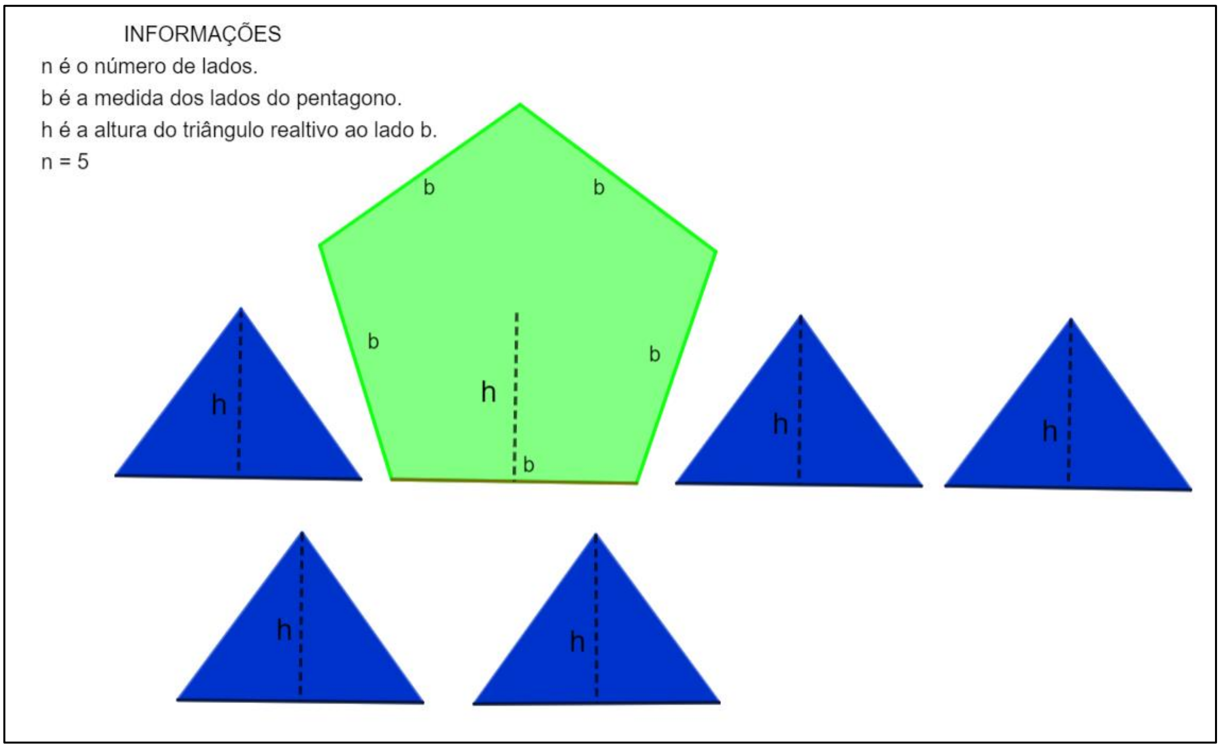
Figura 80: Figura para dedução da fórmula da área do triângulo isósceles.



Fonte: Autores (2022).

Esperamos que cheguem na seguinte formula, $A = \frac{b*h}{2}$, que é a fórmula adotada para calcular a área de um triângulo qualquer.

Figura 81: Figura para dedução da fórmula da área do pentágono.



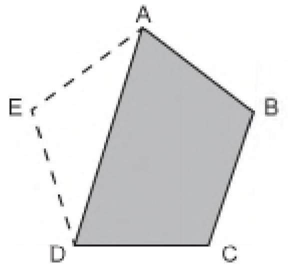
Fonte: Autores (2022).

Esperamos que cheguem na seguinte formula, $A = 5\frac{b*h}{2}$, que é a fórmula adotada para calcular a área de um pentágono, e ainda que concluam que $A = n\frac{b*h}{2}$, é para a área de polígono regular, maior ou igual a cinco lados.

7º Momento: Lista de exercícios.

Caso ainda reste algum tempo de aula será dado a eles uma lista de questões, para que busquem solucionar até o fim do encontro.

1) (ENEM – 2016) Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.



Fonte: ENEM 2016

Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos x = EÂD, y = EDA e z = AÊD do triângulo ADE.

As medidas *x, y* e *z*, em graus, desses ângulos são, respectivamente,

Alternativas

a) 18,18 e 108.

b) 24, 48 e 108.

c) 36, 36 e 108.

d) 54, 54 e 72.

e) 60, 60 e 60.

2) (ENEM - 2021) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

• um triângulo equilátero de lado 12 cm;

• um quadrado de lado 8 cm;

• um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;

• um hexágono regular de lado 6 cm;

• um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, $R\$ \ 0{,}80$ por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão. Use 3 como aproximação para π e use $1{,}7$ como aproximação para $\sqrt{3}$. Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão é um:

a) Triângulo.

b) Quadrado.

c) Retângulo.

d) Hexágono.

e) Círculo.

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos, na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Anexos:

Apêndices:

Referências:

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

ENEM 2016 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 02 de maio de 2022.

ENEM 2020 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 02 de maio de 2022.

ENEM 2021 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 02 de maio de 2022.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática** : 8°ano : ensino fundamental: anos finais. São Paulo, Editora FTD, 2018.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial 8° ano**: ensino fundamental, anos finais. São Paulo: Scipione, 2018.

QUADRILÁTEROS. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/quadrilateros/. Acesso em: 03 de maio de 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Polígonos. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/poligonos.htm. Acesso em: 02 de maio de 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é polígono? .**Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-poligono.htm. Acesso em 03 de maio de 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Paralelogramos. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/paralelogramos.htm. Acesso em: 03 de maio de 2022.

13.1. **Resoluções das atividades;**

Atividade introdutória 1

(ENEM - 2020) Um estudante, morador da cidade de Contagem, ouviu dizer que nessa cidade existem ruas que formam um hexágono regular. Ao pesquisar em um sítio de mapas, verificou que o fato é verídico, como mostra a figura.

Figura 82: Mapa ruas formam hexágono regular.

Fonte 4: Enem 2020.

Ele observou que o mapa apresentado na tela do computador estava na escala $1 : 20\,000$. Nesse instante, mediu o comprimento de um dos segmentos que formam os lados desse hexágono, encontrando 5 cm.

Se esse estudante resolver dar uma volta completa pelas ruas que formam esse hexágono, ele percorrerá, em quilômetro:

Alternativas

f) 1.

g) 4.

h) 6.

i) 20.

j) 24.

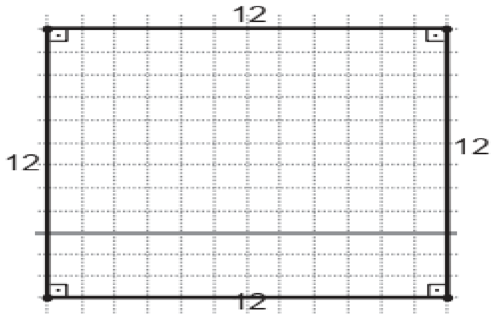
R: Temos que o hexágono tem lado 5 cm, logo o perímetro é $5 * 6 = 30\ cm$, assim mudando a escala $30 * 20.000 = 600.000cm \Rightarrow \frac{600.000}{100.000} = 6km$ pois 1km é equivalente a 100.000cm, assim a resposta correta é a alternativa c) 6 quilômetros.

Atividade introdutória 2

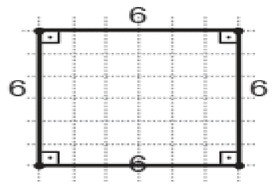
(ENEM – 2021) Um suporte será instalado no box de um banheiro para serem colocados recipientes de xampu, condicionador e sabonete líquido, sendo que o recipiente de cada produto tem a forma de um cilindro circular reto de medida do raio igual a 3 cm. Para maior conforto no interior do box, a proprietária do apartamento decidiu comprar o suporte que tiver a base de menor área, desde que a base de cada recipiente ficasse inteiramente sobre o suporte. Nas figuras, vemos as bases desses suportes, nas quais todas as medidas indicadas estão em centímetro.

I

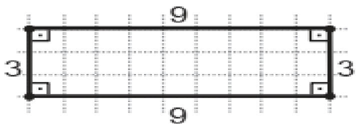
II



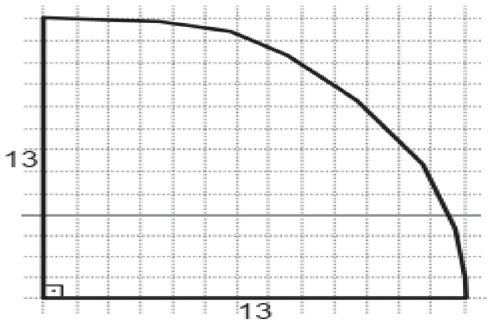
III



IV



V



Utilize 3,14 como aproximação para π.

Para atender à sua decisão, qual tipo de suporte a proprietária comprou?

Alternativas

f) I

g) II

h) III

i) IV

j) V

Resposta:

Devemos encontrar a figura geométrica que representa a menor área e que ainda possa alocar os três produtos básicos, xampu, condicionador e sabonete. Nos é informado que cada um desses três possui um raio de 3 cm, ou seja, seu diâmetro mede 6 cm.

Sabendo apenas disso já podemos eliminar a **alternativa d) IV**, pois ela apresenta uma largura de apenas 3 cm, insuficiente para um produto.

A alternativa c) III também não seria válida porque só caberia um círculo nesse quadrado se desenhássemos.

A alternativa a) I também seria eliminada, ao tentar desenhar os três círculos necessários na figura, no máximo caberia dois, a verificação disso pode ser feita tentando desenhar os círculos dentro da figura.

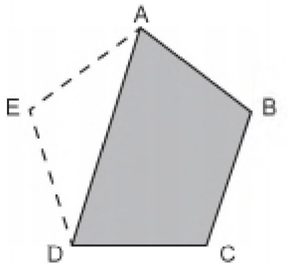
Resta observar a segunda e a última figura, desenhando os círculos nas duas figuras notamos que eles poderiam ser construídos, então precisamos verificar a área dessas duas figuras e ver qual delas tem a menor área.

Na segunda figura, temos um quadrado de lado 12 cm, logo sua área pode ser dada por $A = 12 * 12 = 144\ cm^2$.

Na alternativa e), a figura representa um quarto de um círculo de raio 13 cm, sabendo que a área do círculo é $A = raio^2 * \pi$, com logo sua área é $A = \frac{(13^2 * 3{,}14)}{4} \cong 133\ cm^2$.

Logo, a resposta é a **alternativa e).**

2) (ENEM – 2016) Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.



Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos x = EÂD, y = EDA e z = AÊD do triângulo ADE.
As medidas *x, y* e *z*, em graus, desses ângulos são, respectivamente,
Alternativas

f) 18,18 e 108.
g) 24, 48 e 108.
h) 36, 36 e 108.
i) 54, 54 e 72.
j) 60, 60 e 60.

Resposta:

Como a placa de gesso tem formato de um pentágono regular, sabemos que nessa figura os lados vão possuir mesma medida e os ângulos internos também. Conhecemos que em um pentágono, a soma dos ângulos internos é 540°, basta dividir por cinco para encontrar o valor do ângulo interno, $\frac{540}{5} = 108°$.

Então, o ângulo formado pelo vértice E, mede também 108°. O triângulo AED, tem dois lados com mesma medida, logo ele é isósceles. Por ele ser isósceles, os ângulos da base AD, tem mesma medida. Conhecendo a soma dos ângulos internos em um triângulo é 180°, se retirarmos 108°, vão restar $180° - 108° = 72°$ e como os dois ângulos que faltam são iguais, a medida como deles α, é igual a

$$2\alpha = 72$$

$$\alpha = \frac{72}{2} = 36°$$

Então, os ângulos internos do triângulo AED são 36°, 36° e 108°, que corresponde a alternativa c).

(ENEM - 2021) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

• um triângulo equilátero de lado 12 cm;
• um quadrado de lado 8 cm;
• um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;
• um hexágono regular de lado 6 cm;
• um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R$ 0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão. Use 3 como aproximação para π e use 1,7 como aproximação para √3. Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão é um:

a) Triângulo.
b) Quadrado.
c) Retângulo.
d) Hexágono.
e) Círculo.

R: O dono da loja deseja escolher o cartão que tiver maior área de impressão, desde que seu valor não ultrapasse R$0,80. A empresa que fabrica os cartões cobra R$0,01 por centímetro quadrado, então, se conhecermos a área do cartão seu valor vai ser dado pela multiplicação da área por R$0,01.

Um triângulo equilátero ABC de lado 12 cm

Possui área dada $A = \frac{L*h}{2}$, com $L = 12\ cm,$ falta encontrarmos a altura h. Como no triângulo equilátero podemos dividi-lo em dois triângulos retângulos ABD e BDE com um dos catetos sendo a altura, basta utilizar o teorema de Pitágoras.

Do triângulo retângulo ABD encontrado, usando o Teorema de Pitágoras, $a^2 = c^2 + h^2$, nosso outro cateto medirá a metade do lado do triângulo equilátero, $c = \frac{L}{2}$, e a hipotenusa é justamente o lado do triângulo.

$$h^2 = a^2 - c^2$$

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3L^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{L}{2}\sqrt{3}$$

Logo, a área desse triângulo equilátero vai ser

$$A = \frac{L * h}{2}$$

$$A = \frac{L}{2} * \frac{L}{2}\sqrt{3}$$

$$A\ = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A\ = \frac{12^2.1{,}7}{4}$$

$$A\ =\ 36\,.\,1{,}7$$

$$A\ =\ 61{,}2\ cm^2$$

Precisamos agora encontrar o valor pago nesse cartão, sabendo que é cobrado R$0,01 por centímetro quadrado feito, basta multiplicarmos essa área por 0,01 ou $\frac{1}{100}$. Então, o custo desse cartão é $\frac{61{,}8}{100} = 0{,}618$.

Um quadrado de lado 8 cm;

Possui área dada por

$$A = L * L$$

$$A\ =\ 8^2$$

$$A = 64\ cm^2$$

O valor desse cartão será de $\frac{64}{100} = 0{,}64$.

Um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;

$$A = 11 . 8 = 88$$

$$A = 88\ cm^2$$

O valor desse cartão será de $\frac{88}{100} = 0{,}88$ que é um valor maior do que o dono da loja se dispõe a pagar.

Um hexágono regular de lado 6 cm;

$$A = 6 . \frac{L^2 . \sqrt{3}}{4}$$

$$A = 1{,}5 . (6^2 . 1{,}7)$$

$$A = 1{,}5 . (36 . 1{,}7)$$

$$A = 1{,}5 . 61{,}2$$

$$A = 91{,}8\ cm^2$$

O valor desse cartão será de $\frac{91{,}8}{100} = 0{,}918$ que é um valor maior do que o dono da loja se dispõe a pagar.

Um círculo de diâmetro 10 cm;

Seu raio é dado por

$$Raio\ (R) = \frac{10}{2} = 5\ cm$$

Sua área é

$$A = \pi . R^2$$

$$A = 3 . 5^2$$

$$A = 3 . 25$$

$$A = 75\ cm^2$$

O valor do cartão será de $\frac{75}{100} = 0{,}75$.

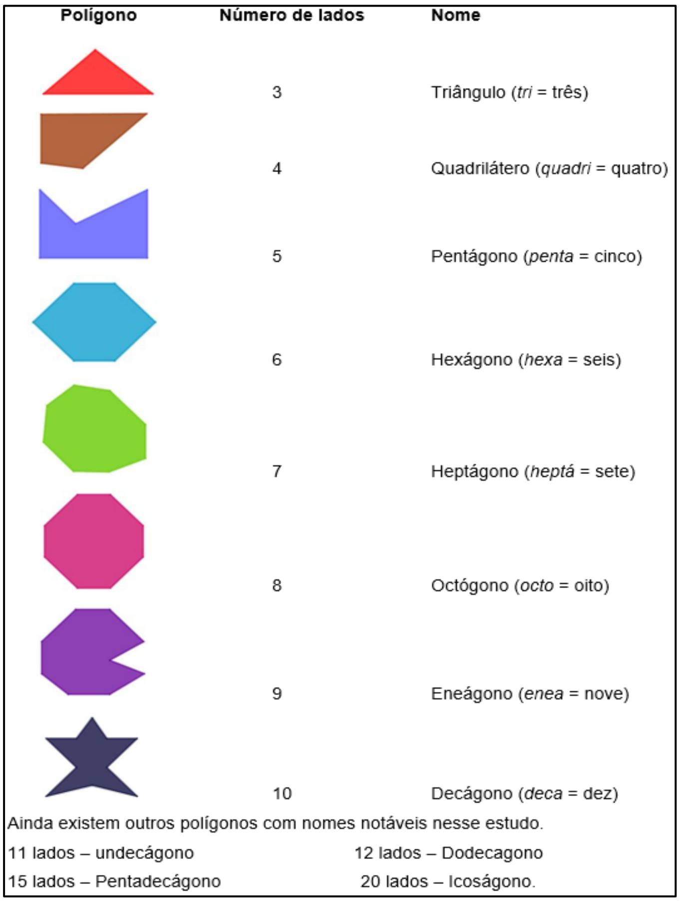
Logo, a melhor escolha é a do círculo de diâmetro 10 cm.

Alternativa correta é a letra e).

13.2. Material entregue aos alunos;

Polígono: É uma figura fechada plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de reta, reunida com a sua região interna.

Figura 83: Ilustração de polígonos e nomes.

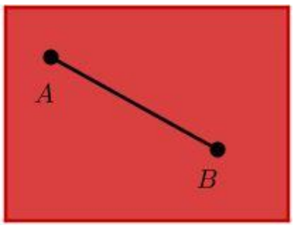


Fonte: Autores (2022).

Polígonos convexos e não convexos: Um polígono é convexo quando não possui reentrâncias.

Em outras palavras, se pudermos construir qualquer segmento com as extremidades A e B no interior do polígono e nenhuma parte desse segmento estiver fora do polígono, então, esse polígono será convexo. Como mostra o exemplo abaixo:

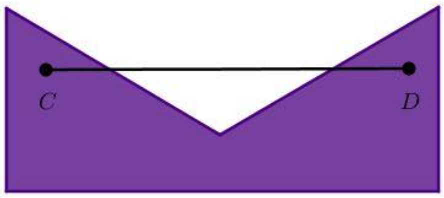
Figura 84: Ilustração de polígono convexo.



Fonte: Autores (2022).

Agora quando for possível construir um segmento com extremidades C e D no interior do polígono e alguma parte desse segmento estiver fora do polígono, então esse polígono é não convexo. Como mostra o exemplo abaixo:

Figura 85: Ilustração de polígono não convexo.



Fonte: Autores (2022).

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo e do número de diagonais.

Fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, $S_A = (n-2)180$, com n sendo o número de lados da figura. Em qualquer polígono convexo a soma dos ângulos externos é sempre igual à $360°$ e a quantidade de diagonais em um polígono pode ser dada pela fórmula $D_p = \frac{n(n-3)}{2}$

Polígonos regulares e não regulares

Quando um polígono convexo possui todos os lados com mesma medida e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas, dizemos que ele é um polinômio convexo regular. E caso algum lado ou ângulo possua uma medida diferente dos demais, chamamos o polígono convexo de não regular.

Para calcular a medida do ângulo interno de um polígono convexo regular, basta dividirmos a soma total dos ângulos internos pela quantidade de lados do polígono, isto é, $M_{\hat{a}ngulo\ interno} = \frac{(n-2)180}{n}$. E a medida do ângulo externo seria dado por $M_{\hat{a}ngulo\ externo} = \frac{360}{n}$.

Paralelogramo

Uma figura plana recebe o nome de paralelogramo quando:

- Os lados paralelos possuem mesma medida;
- Os ângulos opostos da figura apresentam mesma medida;
- Suas diagonais se encontram em seus pontos médios;

Sua área é dada por $A_{paralelogramo} = base * altura.$

Retângulo

É um paralelogramo com lados opostos paralelos e de mesma medida. Possui quatro ângulos internos de 90 graus e suas diagonais possuem a mesma medida.

Sua área é dada por $A_{retângulo} = base * altura.$

Losango

É um paralelogramo com quatro lados de mesma medida e com suas diagonais formando ângulos de 90 graus (perpendiculares). Sua área é dada por $A_{losango} = \frac{Diagonal\ maior * Diagonal\ menor}{2}$.

Quadrado

É um paralelogramo que apresenta os quatro lados com mesma medida e todos os ângulos internos medem 90, graus. Além disso, as diagonais do quadrado possuem a mesma medida e elas são perpendiculares entre si.

Sua área é dada por $A_{quadrado} = base * base.$

Atividade introdutória 1

1. **(ENEM - 2020)** Um estudante, morador da cidade de Contagem, ouviu dizer que nessa cidade existem ruas que formam um hexágono regular. Ao pesquisar em um sítio de mapas, verificou que o fato é verídico, como mostra a figura.

Figura 86: Mapa ruas formam hexágono regular.

.

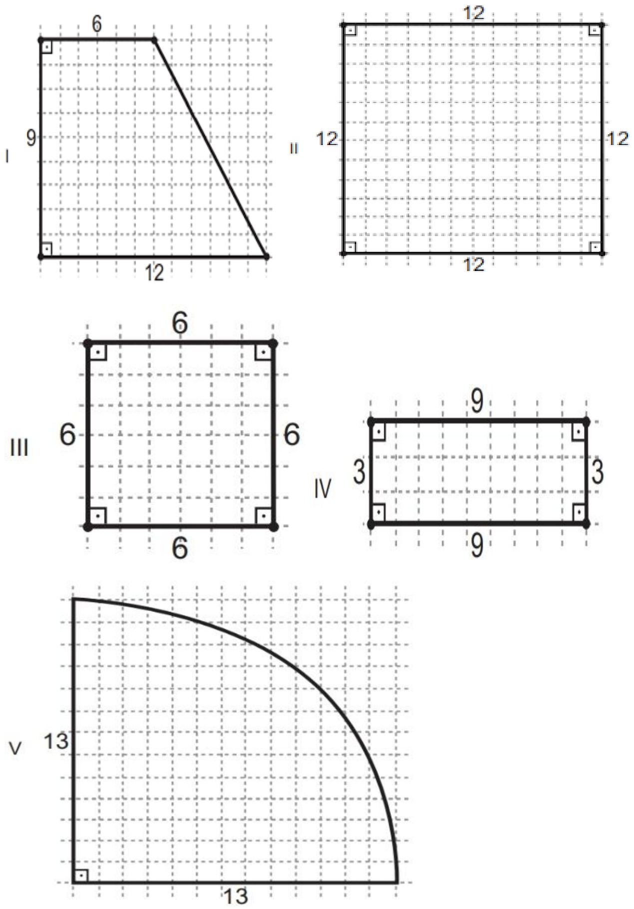
Ele observou que o mapa apresentado na tela do computador estava na escala $1 : 20\,000$. Nesse instante, mediu o comprimento de um dos segmentos que formam os lados desse hexágono, encontrando 5 cm. Se esse estudante resolver dar uma volta completa pelas ruas que formam esse hexágono, ele percorrerá, em quilômetro:

Alternativas

k) 1. b)4. c)6. d)20. e)24.

Atividade introdutória 2

2. **(ENEM – 2021)** Um suporte será instalado no box de um banheiro para serem colocados recipientes de xampu, condicionador e sabonete líquido, sendo que o recipiente de cada produto tem a forma de um cilindro circular reto de medida do raio igual a 3 cm. Para maior conforto no interior do box, a proprietária do apartamento decidiu comprar o suporte que tiver a base de menor área, desde que a base de cada recipiente ficasse inteiramente sobre o suporte. Nas figuras, vemos as bases desses suportes, nas quais todas as medidas indicadas estão em centímetro.



Utilize 3,14 como aproximação para π.

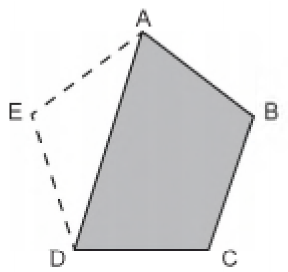
Para atender à sua decisão, qual tipo de suporte a proprietária comprou?

Alternativas

k) I.   b)II.   c)III.   d)IV.   e)V.

Exercícios:

1. **(ENEM – 2016)** Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.



Fonte: ENEM 2016

Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos x = EÂD, y = EDA e z = AÊD do triângulo ADE.

As medidas *x, y* e *z*, em graus, desses ângulos são, respectivamente,

Alternativas

k) 18,18 e 108.

l) 24, 48 e 108.

m) 36, 36 e 108.

n) 54, 54 e 72.

o) 60, 60 e 60.

2. **(ENEM - 2021)** O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

• um triângulo equilátero de lado 12 cm;

• um quadrado de lado 8 cm;

• um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;

• um hexágono regular de lado 6 cm;

• um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, $R\$\ 0{,}80$ por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão. Use 3 como aproximação para π e use $1{,}7$ como aproximação para $\sqrt{3}$. Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão é um:

a) Triângulo.

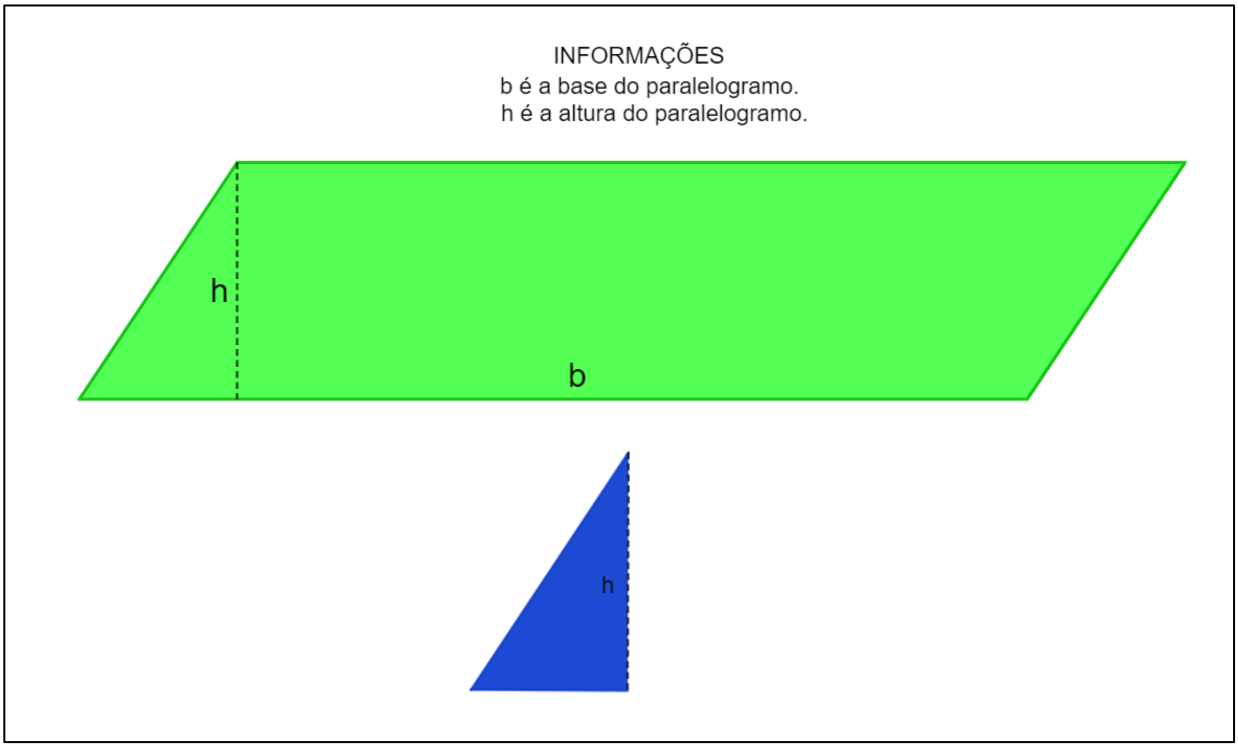
b) Quadrado.

c) Retângulo.

d) Hexágono.

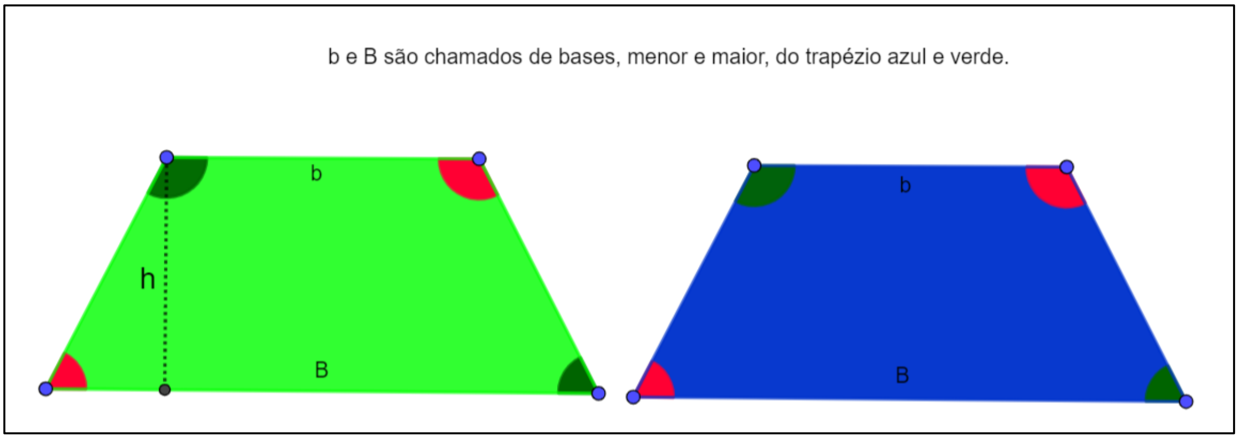
e) Círculo.

Figura 87: Figura para calcular a area do paralelegramo



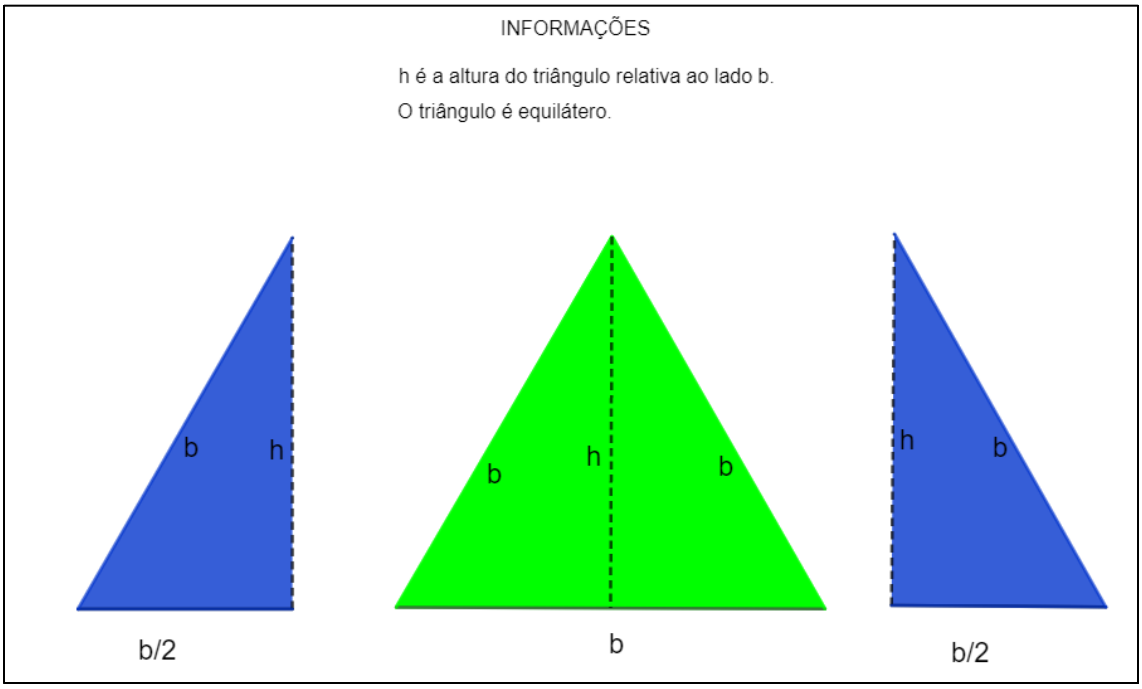
Fonte: Autores (2022).

Figura 88: Figura para calcular a area do trapézio



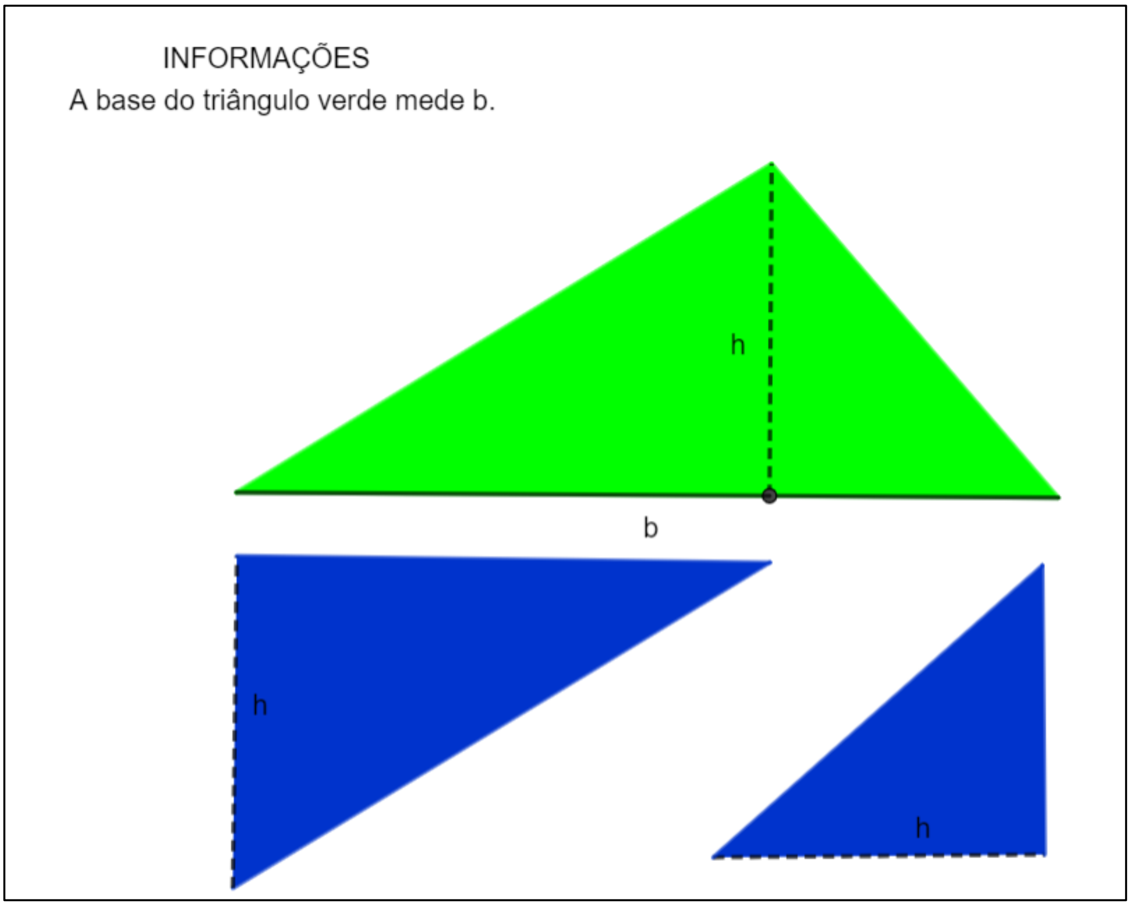
Fonte: Autores (2022).

Figura 89: Figura para calcular a area do triângulo equilátero



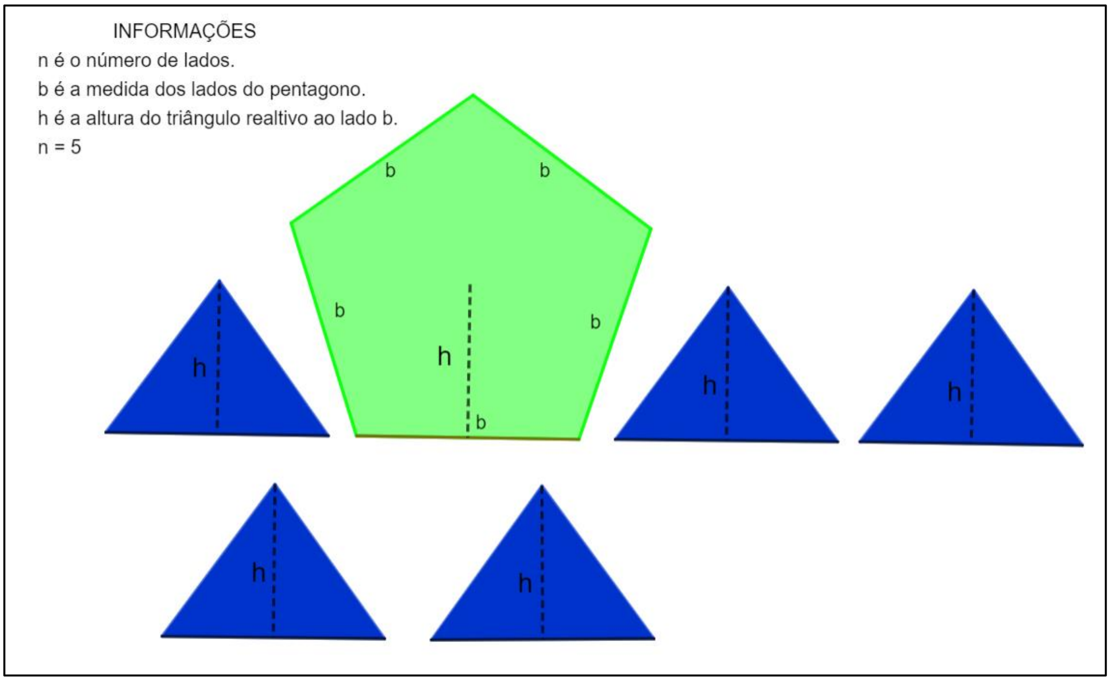
Fonte: Autores (2022).

Figura 90: Figura para calcular a area do triângulo escaleno



Fonte: Autores (2022).

Figura 91: Figura para calcular a area do hexágono



Fonte: Autores (2022).

13.3. **Relatório;**

Encontro 9 - 02/04/2022

Relatório 9 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia sete de maio de 2022, sábado, no período da manhã, na sala A103 no bloco das salas de aulas na Unioeste de Cascavel PR, foi realizado o nono encontro do Promat. Tivemos a participação de sete alunos, que eram os que tem frequência mais consistente. As carteiras foram organizadas em grupos de cinco participantes, mas houve alunos que preferiram trabalhar individualmente. Os conteúdos abordados foram: polígonos convexos, polígonos regulares, soma dos ângulos internos dos polígonos, número de diagonais dos polígonos, e área dos polígonos.

Neste encontro preferimos não utilizar o projetor, embora essa não tenha sido a melhor escolha, pois foi uma aula em que precisamos desenhar muitas figuras; ainda assim conseguimos dar continuidade da mesma maneira, com o custo de demorar mais para fazer os desenhos no quadro. Começamos a aula definindo o que são polígonos, com seus vértices, arestas e ângulos. Conforme íamos escrevendo, também perguntávamos aos alunos, o que eles entendiam por polígonos, como sempre, apenas dois alunos falavam abertamente conosco, enquanto os outros apenas assistiam a aula sem interagir.

A aula manteve este ritmo de palestra, enquanto classificávamos os polígonos, a partir da quantidade de lados, e então entre convexos e não convexos. Neste momento houve uma tentativa por minha parte de cativar, o interesse dos alunos, explorando a definição de polígonos convexos, comentando que convexidade não é conceito apenas de geometria, mas também se aplica a funções e no Cálculo. Além de comentar sobre o “grau” de não convexidade, essa tentativa pode ter sido em vão pois apesar de ser um tema interessante, não havia e não houve evidência, de que as asserções feitas, contribuíram para o entendimento dos conceitos de geometria, pelo contrário, podem ter deixado os alunos mais confusos. Fui alertado mais tarde para evitar curiosidades que não contribuíssem diretamente para o tema em questão.

Houve mais interação no momento seguinte, no qual exploramos com os alunos, a soma dos ângulos internos dos polígonos, começando com o triângulo, então o quadrado, e assim sucessivamente até que os alunos conseguissem perceber que a soma era dada pelo número de triângulos em que os polígonos podiam ser decompostos. Repetimos a técnica construindo com eles o número de diagonais possíveis dentro de cada polígono, começando com o quadrilátero. Distribuímos então, uma folha com questões do ENEM, e pedimos a eles que resolvessem a primeira questão que era calcular o tamanho real de um hexágono regular, em um mapa com escala 1:20 000, e lado medindo 5 cm. Os alunos resolveram essa questão sem dificuldades.

Na segunda parte da aula houve mais interação com os alunos, demos continuidade na resolução dos exercícios, onde no segundo, pedia-se para que descobrissem dentre cinco possibilidades, qual era a base de menor área que conseguiria conter três circunferências de raio 3 cm, os alunos também não tiveram dificuldades em resolver essa questão e tivemos apenas que confirmar as fórmulas de área das figuras presentes.

Como atividade seguinte distribuímos, duas folhas. Na primeira havia um paralelogramo verde, um triângulo retângulo azul, e dois trapézios, um azul e um verde. Essas figuras deveriam ser recortadas, e os alunos deveriam tentar deduzir, a partir delas, as respectivas fórmulas para cálculo de suas áreas. Na segunda folha havia um triângulo equilátero verde, e dois triângulos retângulos azuis, que eram duas metades do triângulo verde, e um pentágono regular verde, e cinco triângulos azuis nos quais cada um tinha um quinto da área do pentágono. Passamos o restante da segunda parte da aula ajudando os alunos, a deduzirem as fórmulas das figuras geométricas, que eles recortaram. Todos os alunos participaram dessa atividade, e conseguimos que eles percebessem as características de cada figura e, como usá-las para determinar suas áreas. Acredito que essa última parte tenha sido eficaz em quebrar a rotina pré-estabelecida, e cativar a atenção dos alunos para os conceitos de áreas e ângulos.

14. **Encontro 10: Plano de aula;**

10º Encontro – 14 de maio de 2022

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino – NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Conteúdos: Geometria da circunferência.

Objetivo geral: Compreender os principais conceitos relacionados ao estudo da circunferência e como aplicá-los na resolução de problemas.

Objetivos específicos: Objetiva-se que os alunos sejam capazes, ao final dessa aula, de:

- Compreender os conceitos de perímetro ou comprimento da circunferência, área total e área de um setor circular do círculo, além de aplicar esses conceitos;
- Entender o significado e a importância da constante Pi;
- Compreender os conceitos de ângulo central, ângulo inscrito, ângulo externo e ângulo interno da circunferência;

Tempo de execução: Um encontro com duração de 200 minutos.

Recursos didáticos: Objetos circulares, cordões, réguas, *Notebook* e Projetor.

Encaminhamento metodológico:

Esse plano de aula busca seguir os processos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, com foco em resgatar o conhecimento que os alunos adquiriram no ensino básico, incentivar a pesquisa, o diálogo e o uso de diferentes métodos de resolução. Por conta do tempo, essa aula foi modificada para trabalhar aspectos principais da concepção de Ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas, com os alunos se tornando protagonistas, construtores de seu próprio conhecimento e analisadores de seus próprios métodos e soluções. Os estagiários assumirão o papel de orientadores, incentivadores, observadores, agindo somente quando a aula se mostrar estagnada.

Os alunos serão organizados em grupos de quatro ou cinco participantes, facilitando o atendimento às dúvidas. Serão entregues, no decorrer da aula duas listas contendo um resumo da aula, com as principais definições e exemplos, para que os alunos não tenham a necessidade de copiar o conteúdo.

1º Momento: Correção das duas atividades da aula passada. (20 min)

Primeiramente, vamos corrigir as duas atividades finais que restaram do encontro anterior, expondo a resolução na lousa.

2º Momento: Definição de circunferência e de seus principais elementos. (10 min)

Em seguida, vamos apresentar a definição de circunferência, falando sobre os principais conceitos relacionados a esse estudo como o raio, a corda, o diâmetro e o perímetro ou comprimento da circunferência.

Definição: Circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual, todos os seus pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado de **centro.**

Em uma circunferência, podemos destacar os seguintes elementos:

Raio: Segmento de reta que liga o centro O a um ponto qualquer da circunferência.

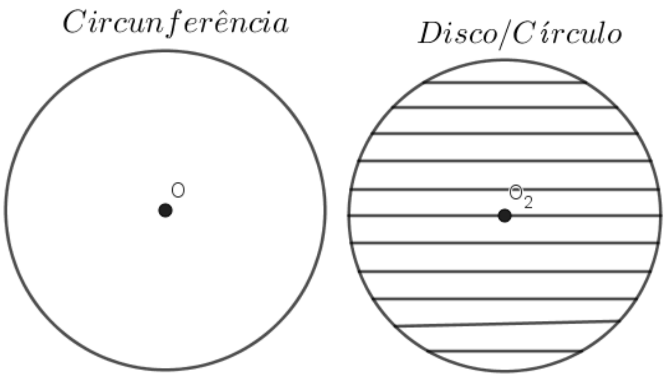
Corda: Segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: É a corda que passa pelo centro da circunferência.

Chamamos de círculo a união dos pontos da circunferência com os pontos que estão em seu interior.

Ainda comentaremos sobre a diferença entre círculo e circunferência.

Figura 92: Ilustração círculo e circunferência.



Fonte: Autores (2022).

3º Momento: Atividade de pesquisa do valor do pi com medições de circunferências. (60 min)

No próximo momento, planejamos aplicar uma atividade para encontrar o valor da constante pi e da fórmula do perímetro da circunferência. Essa atividade consiste em cada grupo escolher alguns objetos circulares que iremos disponibilizar e realizar a medição do comprimento da circunferência, do seu diâmetro e da divisão entre ambos.

Solicitaremos que criem uma tabela com todas as medidas do perímetro e diâmetro de cada objeto circular, e façam a divisão anotando estes dados. Objetivamos que os alunos observem que todas as divisões tendem a um valor em torno de três, concluiremos criando uma tabela na lousa e, comentando sobre o valor de pi. Os valores de pi não estarão muito exatos, por isso devemos informá-los que isso já era esperado, por conta de os instrumentos de medida não serem muito precisos.

Comprimento da circunferência: O comprimento de qualquer circunferência pode ser obtido pela multiplicação do diâmetro pela constante $\pi = 3{,}1415$ ... da seguinte forma, $C = d\pi$. Mas como o diâmetro é o dobro do raio, então, $C = 2r\pi$.

4º Momento: Atividade introdutória sobre área da circunferência. (30 min)

Em seguida, vamos introduzir o estudo da área da circunferência com um problema do ENEM – 2019. Essa questão foi escolhida por necessitar apenas da fórmula da área da circunferência $A = r^2\pi$, sendo preciso calcular a área antes e depois do acréscimo do raio e realizar a diferença entre essas duas áreas.

Vamos dar um tempo de 15 minutos para os estudantes resolverem. Após esse período, vamos convidar algum aluno para ir resolver a questão na lousa. Caso ninguém se ofereça vamos perguntar se poderiam dar a resposta oralmente. Um tempo de 10 minutos é suficiente para sua resolução no quadro.

Atividade introdutória 1

1) **(ENEM – 2019 adaptado)** Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo $6\,m$, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, para 8m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100\ m^2$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

Alternativas

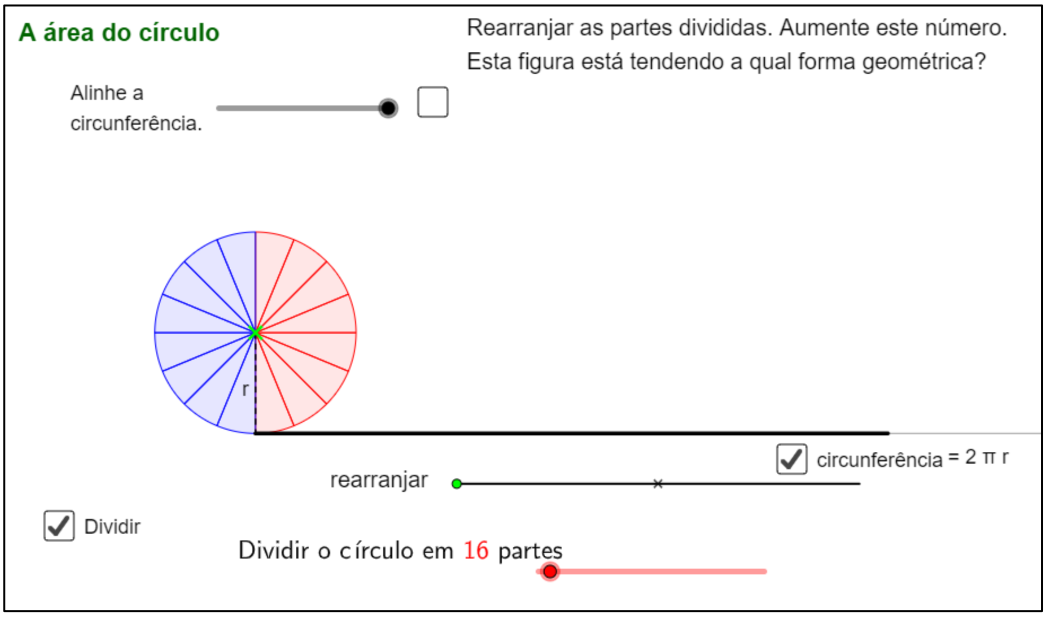
a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21\ m^2$.
b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24\ m^2$.
c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48\ m^2$.
d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108\ m^2$.
e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120\ m^2$.

4º Momento: intervalo. (20 min)

5º Momento: Definição de área do círculo. (30 min)

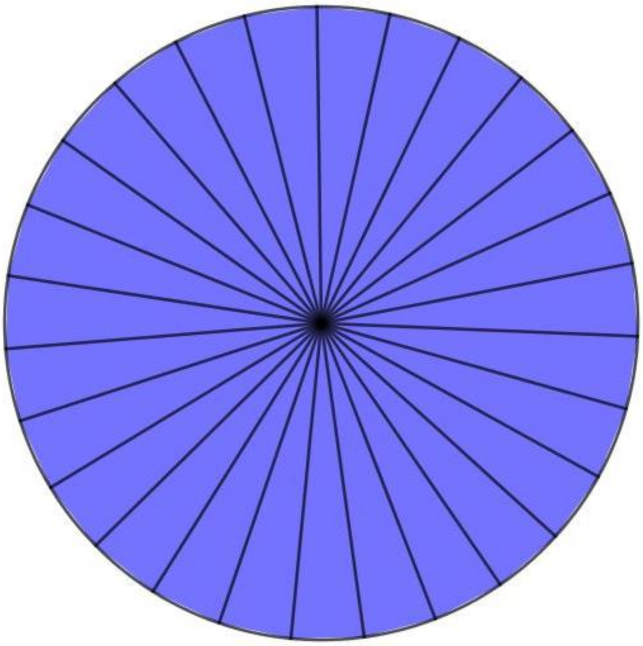
Após a correção da atividade, vamos mostrar a ideia da medição da área do círculo utilizando um recorte de um círculo. Realizando depois o recorte em várias partes iguais como mostra a figura abaixo, iremos mostrar este processo no *GeoGebra*. Explicaremos que se esse processo de divisão do círculo cada vez em partes menores, chegaria um momento que formaria um retângulo, com sua área sendo dada por $A = r * r\pi = r^2\pi$.

Figura 93: Ilustração da apresentação da área do círculo.



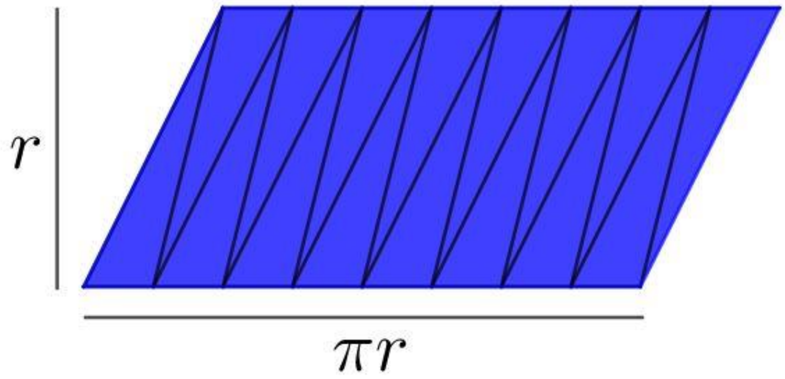
Fonte: Aline Lemmertz, Anthony OR 柯志明

Figura 94: Círculo repartido em diversos pedaços iguais.



Fonte: Autores (2022).

Figura 95: União das partes iguais formando o paralelogramo.



Fonte: Autores (2022).

Área do círculo: Para qualquer círculo, temos que sua área pode ser dada por $A_{círculo} = r^2\pi$.

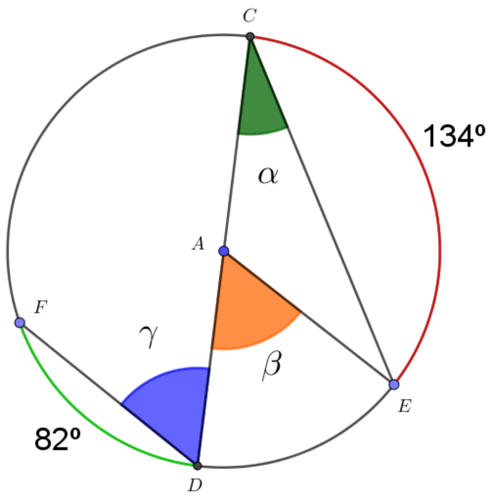
6º Momento: Atividade introdutória sobre ângulos central e inscrito na circunferência. (30 min)

Em seguida, para introduzirmos o conceito de ângulos central e inscrito na circunferência, vamos usar um problema que trabalha com os dois tipos de ângulos da circunferência e relembra outros conteúdos estudados no oitavo encontro como ângulos suplementares e opostos pelo vértice. Um tempo de 15 minutos será deixado para os alunos resolverem, enquanto isso os estagiários estarão caminhando pela sala, respondendo as possíveis dúvidas. Após esse período, um estagiário resolveria o problema no quadro, com um tempo de 10 minutos.

Atividade introdutória 2

Na figura, A, B, C e D são pontos da circunferência de centro em O, sendo AB um diâmetro. Conhecidas as medidas angulares dos arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{BD}$, conforme indicado na figura, determine, em graus, a soma $\alpha + \beta + \gamma$.

Figura 96: Figura atividade sobre ângulo central.

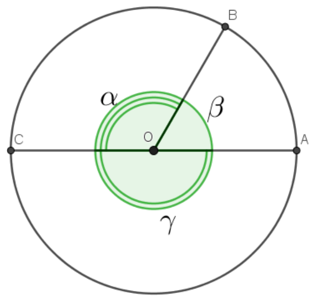


Fonte: Autores (2022).

As ilustrações serão projetadas, para que os alunos as observem com detalhes.

Ângulo central: Os ângulos que possuem como vértice o **centro da circunferência** são chamados de ângulos centrais. Na figura baixo, são exemplos de ângulos centrais os ângulos α, β e γ. A medida em graus do arco $\widehat{AB}$ é por definição a medida do ângulo central β, o mesmo ocorre do $\widehat{BC}$ com α e do $\widehat{AC}$ com γ.

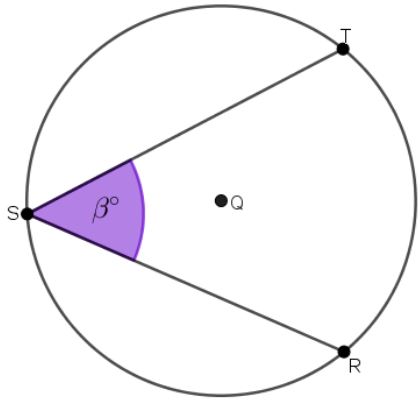
Figura 97: Ilustração ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

Ângulo inscrito: O vértice é um ponto da circunferência, na figura abaixo o ângulo β é um ângulo inscrito na circunferência.

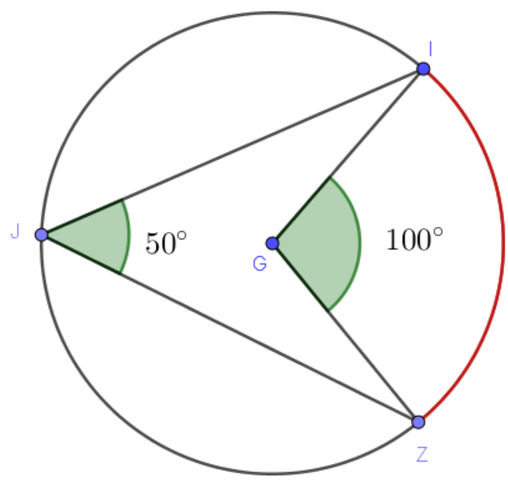
Figura 98: Ilustração ângulo inscrito na circunferência.



Fonte: Autores (2022).

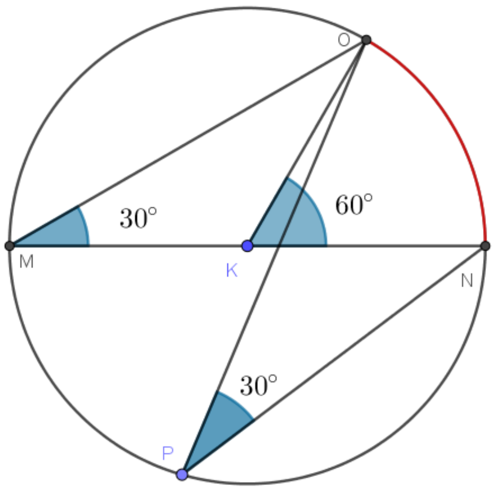
Teorema: Numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.

Figura 99: Ilustração relação ângulo central e inscrito na circunferência.



Fonte: Autores (2022).

Figura 100: Segunda ilustração ângulo central e inscrito na circunferência.



Fonte: Autores (2022).

7º Momento: Atividade. (20 min)

Para terminar, vamos pedir que resolvam as duas atividades abaixo que foram escolhidas por uma trabalhar com o comprimento da circunferência e a outra por trabalhar com o ângulo interno. Caso sobre tempo, vamos convidar dois alunos para resolverem as duas questões.

Atividades finais

1)(ENEM – 2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio.

Use 3 como aproximação para π.

Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

Alternativas

a) 0,30 km

b) 0,75 km

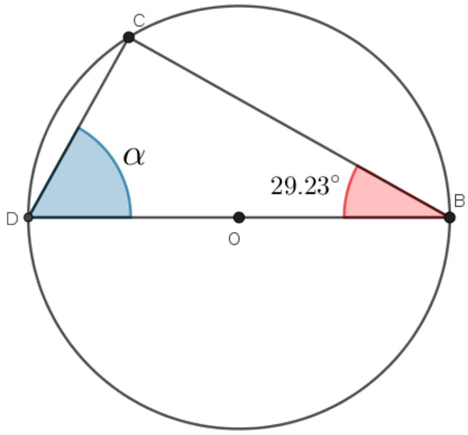
c) 1,50 km

d) 2,25 km

e) 4,50 km

2)Determine a medida do ângulo α da figura abaixo

Figura 101: Figura atividade sobre ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

1. 39,23º
2. 60,77°
3. 61,77°
4. 30,77°
5. 60,23°

Avaliação:

A avaliação será realizada de forma contínua no decorrer da aula, na qual será avaliada a participação dos alunos ao responder os questionamentos realizados pelos estagiários, ao darem exemplos, na apresentação de resoluções oralmente ou na lousa.

Referências:

ÂNGULO CENTRAL E ÂNGULO INSCRITO – Problema. **Clubes de Matemática da OBMEP** – Disseminando o estudo da matemática. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/angulo-central-e-angulo-inscrito-problemas/. Acesso em: 12 de maio de 2022.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

ENEM 2014 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 02 de maio de 2022.

ENEM 2019 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em: 02 de maio de 2022.

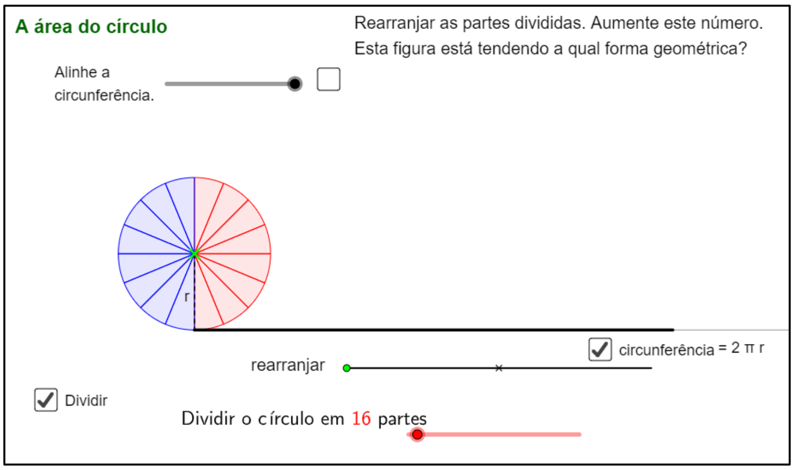
MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática** - Ideias e desafios. 18 ed. São Paulo, Saraiva, 2015.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Ângulos na circunferência"; **Brasil Escola.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/angulos-no-circulo.htm. Acesso em 08 de maio de 2022.

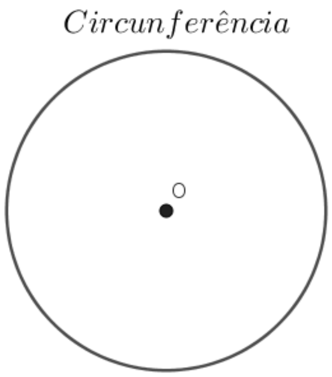
STOCCO, Kátia Cristina. DINIZ, Maria Ignez de Souza. **Matemática** – Ensino Médio. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

Youssef, Antonio Nicolau; Pachi, Clarice Gameiro da Fonseca; Hessel, Heloísa Maria. **Matemática -** Coleção Linguagens e aplicações. São Paulo: Cereja, 2015.

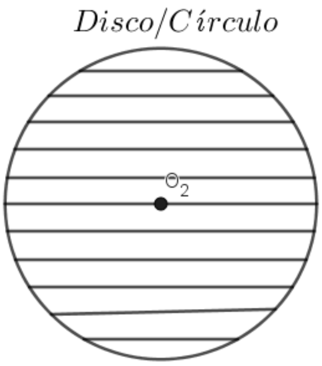
Anexos:



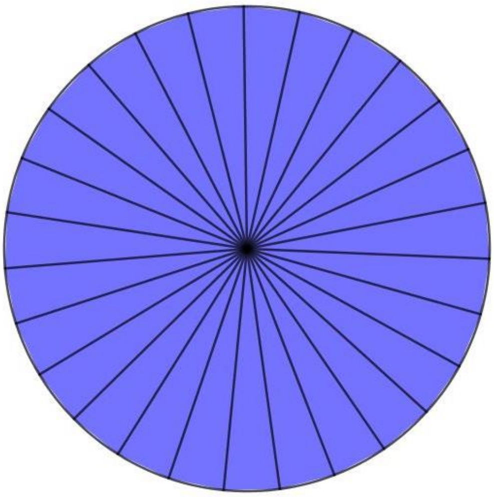
Apêndices:



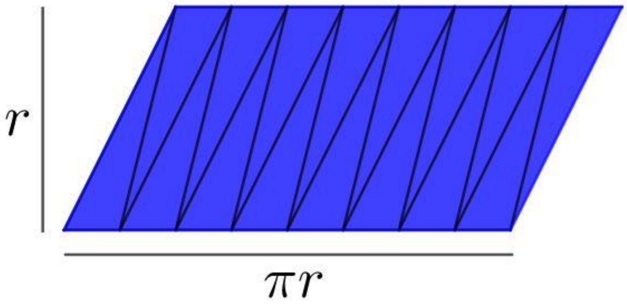
A)



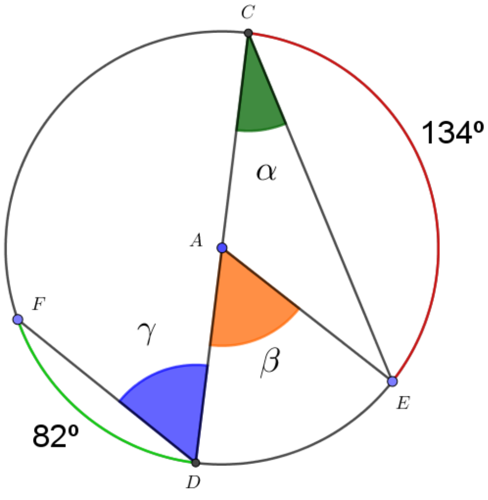
B)



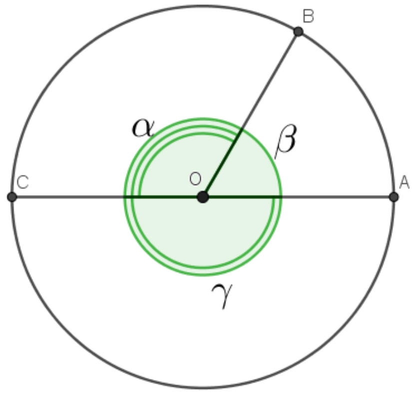
C)



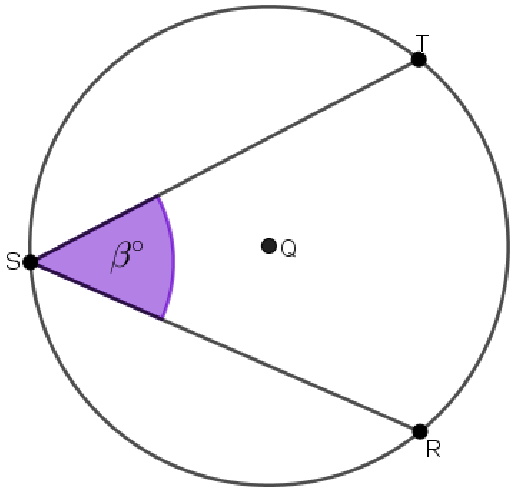
D)



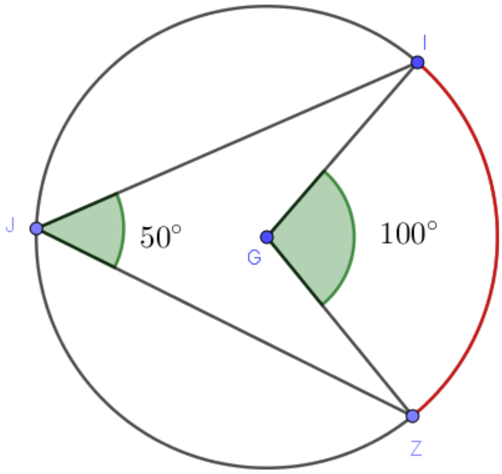
E)



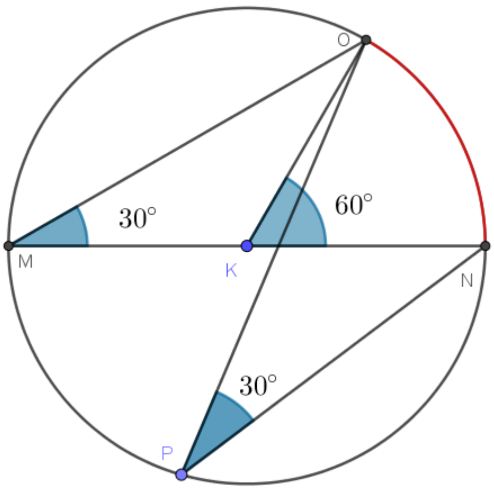
F)



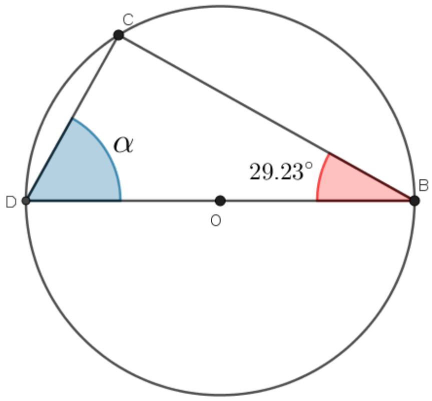
G)



H)



l)



14.1. **Resoluções das atividades;**

(ENEM – 2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo $6\,m$, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, para $8\,m$, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100\,m^2$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

Alternativas

f) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21\,m^2$.

g) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24\,m^2$.

h) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48\,m^2$.

i) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108\,m^2$.

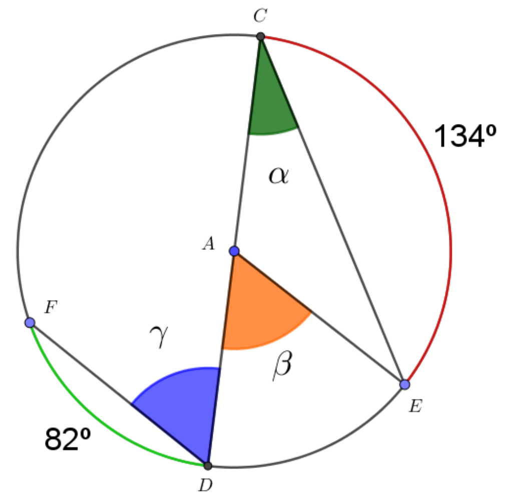
j) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120\,m^2$.

R: Sabendo que $A = \pi r^2$ para o atual gramado é $A = 3.3^2 = 27\,m^2$, já para o novo gramado $A = 3.4^2 = 48\,m^2$, fazendo $48 - 27 = 21\,m^2$, assim o total de $100\,m^2$ disponível é suficiente para concluir a obra.

Atividade introdutória 2

Na figura, A, B, C e D são pontos da circunferência de centro em O, sendo AB um diâmetro. Conhecidas as medidas angulares dos arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{BD}$, conforme indicado na figura, determine, em graus, a soma $\alpha + \beta + \gamma$.

Figura 102: Figura atividade sobre ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

R: Podemos notar que o ângulo $B\hat{O}D$ mede 134°, pois ele é gerado pelo arco $\widehat{BD}$ que tem medida angular de 134°. O ângulo β é suplementar ao ângulo $B\hat{O}D$, portanto, o ângulo β mede $46°$. O triângulo OBD é isóscele pois, os lados têm a mesma medida do raio, logo os ângulos da base são iguais. Sabendo que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°, vamos ter

$$\alpha + \alpha + 134° = 180°$$

$$2\delta = 46$$

$$\delta = \frac{46}{2} = 23°$$

Podemos notar que o triângulo COA também é isóscele pis, a medida de dois lados é igual ao raio. Também podemos ver que a medida do ângulo AÔC mede 82° por ele ser gerado pelo arco que tem medida angular de 82°. Usando que a soma dos ângulos internos do triângulo é sempre 180°, vamos ter

$$\gamma + \gamma + 82 = 180°$$

$$2\gamma = 98°$$

$$\gamma = \frac{98}{2} = 49°$$

Logo, $\alpha + \beta + \gamma = 49° + 23° + 46° = 118°$.

Atividades finais

1)(ENEM – 2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio.

Use 3 como aproximação para π.

Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

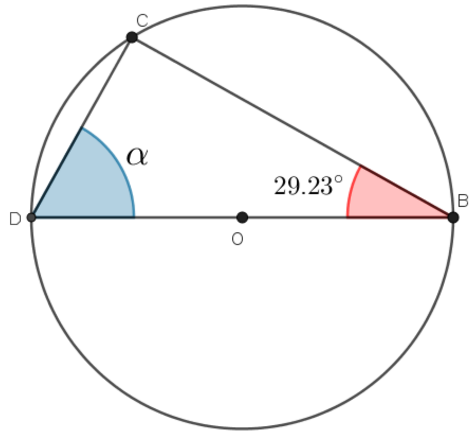
Alternativas

f) 0,30 km
g) 0,75 km
h) 1,50 km
i) 2,25 km
j) 4,50 km

R: Sabendo que a praça circular tem raio 50 m, uma volta completa nessa circunferência é dada pelo comprimento dela, ou seja, $C = 2r\pi = 2 * 3 * 50 = 300\ m$, como foi dado quinze voltas em torna da praça, então o homem percorreu $15 * 300 = 4500\ m = 4{,}5\ km$. Alternativa e.

2)Determine o valor da medida do ângulo α da figura abaixo

Figura 103: Figura atividade sobre ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

6. 39,23º
7. 60,77°
8. 61,77°
9. 30,77°

R: Podemos notar que o ângulo central nesta circunferência mede 180°, logo, o ângulo inscrito $D\hat{C}B$ de mesmo arco $\widehat{BD}$ tem medida de $90°$. Conhecendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, a medida do ângulo alfa é $\alpha = 180° - 29{,}33° - 90° = 60{,}67°$. Alternativa b.

14.2. **Material entregue aos alunos;**

Definição: Circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual, todos os seus pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado de **centro.**

Em uma circunferência, podemos destacar os seguintes elementos:

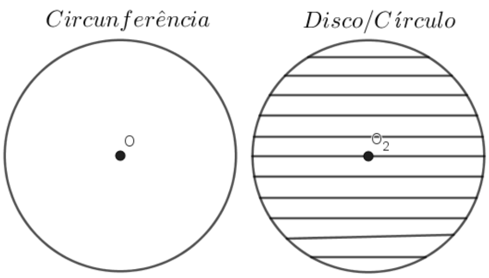
Raio: Segmento de reta que liga o centro O a um ponto qualquer da circunferência.

Corda: Segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: E a corda que passa pelo centro da circunferência.

Chamamos de círculo a união dos pontos da circunferência com os pontos que estão em seu interior.

Figura 104: Ilustração círculo e circunferência.



Fonte: Autores (2022).

Comprimento da circunferência: O comprimento de qualquer circunferência pode ser obtido pela multiplicação do diâmetro pela constante $\pi = 3{,}1415\ldots$ da seguinte forma, $C = d\pi$. Mas como o diâmetro é o dobro do raio, então, $C = 2r\pi$.

1) (ENEM – 2019 adaptado) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo $6\,m$, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, para 8m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100\,m^2$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

Alternativas

k) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21\,m^2$.

l) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24\,m^2$.

m) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48\,m^2$.

n) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108\,m^2$.

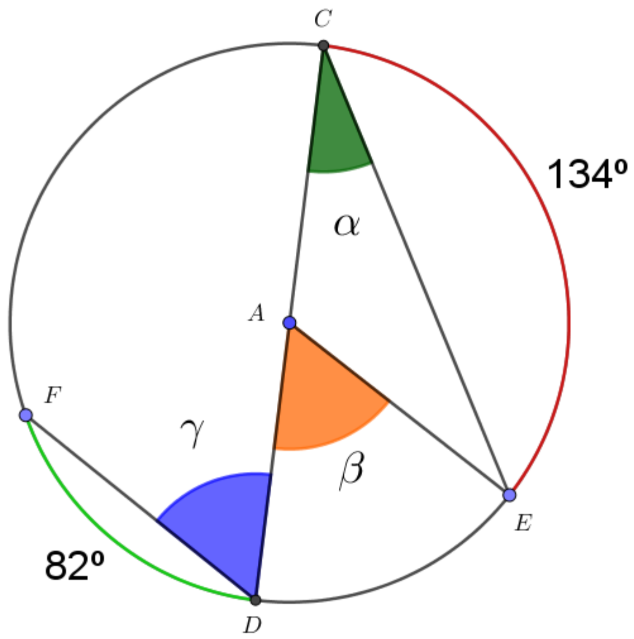
o) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120\,m^2$.

Área do círculo: Para qualquer círculo, temos que sua área pode ser dada por $A_{círculo} = r^2\pi$.

Atividade introdutória 2

Na figura, A, B, C e D são pontos da circunferência de centro em O, sendo AB um diâmetro. Conhecidas as medidas angulares dos arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{BD}$, conforme indicado na figura, determine, em graus, a soma $\alpha + \beta + \gamma$.

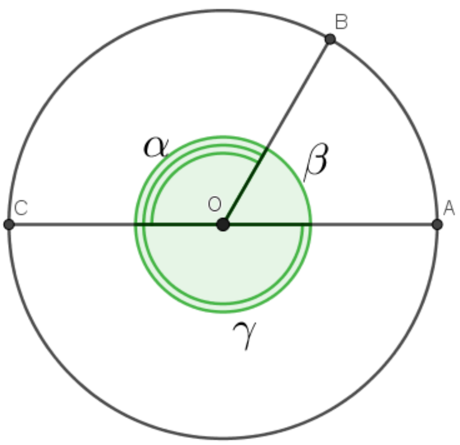
Figura 105: Figura atividade sobre ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

Ângulo central: Os ângulos que possuem como vértice o **centro da circunferência** são chamados de ângulos centrais. Na figura baixo, são exemplos de ângulos centrais os ângulos α, β e γ. A medida em graus do arco $\widehat{AB}$ é por definição a medida do ângulo central β, o mesmo ocorre do $\widehat{BC}$ com α e do $\widehat{AC}$ com γ.

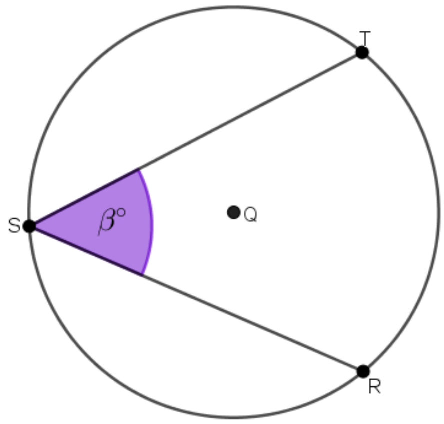
Figura 106: Ilustração ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

Ângulo inscrito: O vértice é um ponto da circunferência, na figura abaixo o ângulo β é um ângulo inscrito na circunferência.

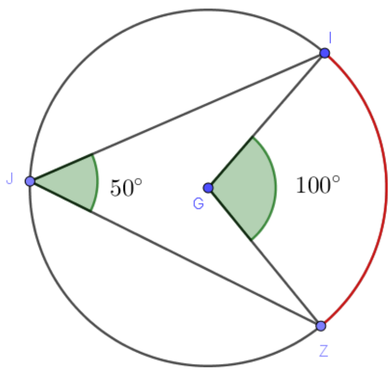
Figura 107: Ilustração ângulo inscrito na circunferência.



Fonte: Autores (2022).

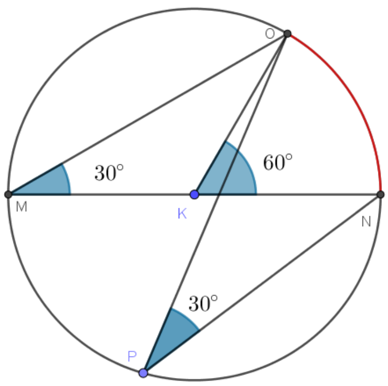
Teorema: Numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.

Figura 108: Ilustração relação ângulo central e inscrito na circunferência.



Fonte: Autores (2022).

Figura 109: Segunda ilustração ângulo central e inscrito na circunferência.



Fonte: Autores (2022).

Atividades finais

1) (ENEM – 2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem $50\ m$ de raio.

Use 3 como aproximação para π.

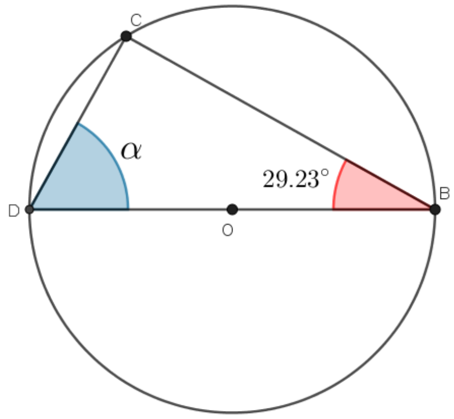
Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

Alternativas

k) 0,30 km
l) 0,75 km
m) 1,50 km
n) 2,25 km
o) 4,50 km

2) Determine a medida do ângulo α da figura abaixo

Figura 110: Figura atividade sobre ângulo central.



Fonte: Autores (2022).

10. 39,23º
11. 60,77°
12. 61,77°
13. 30,77°
14. 60,23°

14.3. **Relatório;**

Encontro 10 - 14/05/2022

Relatório 10 - Sala A103

Grupo de estagiários: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; William F.de O. Pinheiro

No dia 14 de maio de 2022, na sala A103 do bloco das salas de aula da Unioeste, em Cascavel Paraná, às oito horas da manhã foi realizado o décimo encontro do Promat. Tivemos a participação de dez alunos, que estiveram presentes na maioria dos encontros anteriores. O conteúdo abordado foi circunferência, seus elementos, raio, corda, ângulo central, ângulo inscrito e suas propriedades.

Iniciamos a aula definindo, o que é circunferência e disco, suas semelhanças e diferenças. Utilizamos compasso e régua para desenhar no quadro e, projetarmos as figuras. Durante esta etapa, os alunos apenas assistiram e, embora fizéssemos perguntas a eles, como de costume, apenas um ou dois deles tinha segurança ao responder. Após esta etapa introduzimos o conceito de raio e corda, com projeções interativas usando o software *Geogebra*.

Realizamos um experimento, no qual distribuímos aos alunos um barbante e alguns objetos redondos como uma semiesfera, tronco de cone, discos de madeira e cilindros de tamanhos variados. Pedimos para que construíssem uma tabela com três colunas, na primeira escreveriam, o comprimento da circunferência dos objetos, que mediriam usando o barbante; na segunda, colocariam o diâmetro do objeto correspondente; e, na terceira, a razão entre comprimento e diâmetro; para cada objeto. Nosso objetivo com este experimento, era que eles percebessem, que a razão entre essas medidas, convergiria para o mesmo número, que é aproximadamente $3{,}1415\ldots \cong \pi$. A partir dos dados obtidos no experimento, concluímos com os alunos, no quadro que, o comprimento de qualquer circunferência é dado por $C = 2\pi r$, na qual C é o comprimento da circunferência. Assim, é possível notar que o comprimento varia de acordo com r, que é o raio da circunferência. Comentamos que este experimento, tem margem de erro, pois o barbante pode esticar, bem como pode haver erro na hora de medir, devido a erros inclusive na precisão dos instrumentos de medida.

Depois de encontrarmos o comprimento do perímetro, mostramos com uma animação interativa, como é calculada a área de qualquer circunferência. Nesse momento todos os alunos tiveram novamente uma postura de passividade, mas acreditamos que a projeção interativa, na qual uma circunferência sendo fatiada em n pedaços iguais, então estes pedaços eram rearranjados para montar uma forma aproximada de paralelogramo, e mostrávamos que quando as fatias eram bem pequenas esse paralelogramo tendia a um retângulo da lados r e πr e que a área era dada por $A = \pi r^2$, teve sucesso em ser compreendida.

Pedimos que os alunos resolvêssem uma questão do Enem, na qual era pedido para que descobrissem, a área da diferença, entre uma circunferência de raio quatro e outra de raio três. Eles não tiveram problemas em conseguir resolver essa questão apenas pedindo confirmação do resultado, um aluno respondeu à questão no quadro corretamente. Após o intervalo, introduzimos o conceito de ângulo central e ângulo inscrito, e mostramos que o ângulo central é sempre o dobro do ângulo inscrito, em relação a uma mesma corda. Então pedimos para que os alunos resolvessem uma questão na qual se pedia que descobrissem o valor da soma de três ângulos $\alpha + \beta + \gamma$. Os alunos necessitaram de apenas uma breve explicação de como usar o teorema do ângulo central e, por ser muito semelhante, a questão seguinte em que se pedia, que descobrissem o valor do ângulo, de um triângulo inscrito em uma circunferência, na qual o lado maior era o ângulo central da circunferência era o de 180º.

Concluímos a aula com estes exercícios, e ainda sobrou tempo, para lembrarmos aos alunos de se inscreverem para a segunda etapa do Promat. Na sequência distribuímos doces como um gesto final de agradecimento, por nos permitirem ajudá-los a compreender melhor, alguns conceitos matemáticos. Concluimos este relatório, dizendo que, embora não se possa garantir que os alunos tiveram uma experiência significativa, nós como professores tivemos, e essa experiência foi fundamental para nosso aperfeiçoamento como docentes.

15. **Projeto do Dia Nacional da Matemática**

INTRODUÇÃO

Essa proposta tem por objetivo descrever as atividades a serem desenvolvidas em comemoração ao Dia Nacional da Matemática, elaborado como trabalho complementar de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Nossa intenção com esse projeto é divulgar o Dia Nacional da Matemática, comemorado no dia 6 de maio em todo território nacional. Vamos explicar a criação e o objetivo desse dia especial para a educação. Junto da divulgação, vamos aplicar uma série de atividades que trabalham com conteúdo matemáticos já vistos pelos discentes, mas com uma abordagem mais didática e lúdica, de modo a promover interesse nos alunos pela disciplina de Matemática.

Essa proposta será aplicada no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho nas turmas de 6° ao 9° ano, no período da manhã e da tarde. O Dia Nacional da Matemática tem objetivo trazer reflexões a respeito da educação matemática, apresentar novos modelos de ensino e aprendizagem, e resgatar o interesse dos alunos pela disciplina.

O dia 06 de maio foi escolhido em homenagem ao nascimento do matemático, escritor e educador brasileiro, Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido por seu pseudônimo, Malba Tahan. Há tempos que essa data já era comemorada informalmente no país, mas foi em 26 de junho de 2013 que a Presidenta da República, Dilma Rousseff, sancionou a lei n° 12.835, que instituiu que o Dia Nacional da Matemática deveria ser comemorado anualmente em todo território nacional.

OBJETIVOS GERAIS

- Divulgar o Dia Nacional da Matemática e promover a integração dos alunos;
- Realizar atividades lúdicas e dinâmicas envolvendo conteúdos de matemática;
- Constatar a importância de Malba Tahan na história da Matemática e da Educação Matemática;
- Ter um momento de recreação, trabalhando a matemática de forma divertida e interessante.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Com a realização do plano em questão, objetivamos que os alunos possam

- Compreender a importância do Dia Nacional da Matemática, sua origem e relação com o professor Júlio Cesar de Mello e Souza, além da lei federal que rege desde 2013;
- Conhecer a história de Malba Tahan, sua principal obra e notar a relação entre o estudo de frações com o problema dos 21 vasos, como um exemplo de situação cotidiana;
- Ter um momento para aplicar e praticar as operações básicas da matemática com atividades lúdicas;

PÚBLICO-ALVO: Esse projeto está destinado a alunos do Ensino Fundamental entre o 6° ao 9° ano, nos períodos da manhã e da tarde do Colégio Olinda Truffa de Carvalho. As atividades dispostas para esse dia, abordam conteúdos já estudados por ambos os anos, porém em níveis de dificuldades diferentes, como as quatro operações básicas.

CRONOGRAMA: O projeto possui um tempo de execução de 8 horas, ocorrendo em toda a parte da manhã e da tarde.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO:

Inicialmente, durante o horário da aula de matemática, faremos uma breve introdução sobre o Dia Nacional da Matemática, apresentando a criação e objetivos dessa data. Um tempo de 10 minutos será necessário para essa introdução.

Em seguida, será proposto que resolvam individualmente a atividade introdutória listada abaixo, retirada da obra de Júlio Cesar de Mello e Souza. Essa atividade inicial foi escolhida por trabalhar com a operação de soma com quantidades inteiras e fracionárias, podendo ser resolvida por tentativa, usando desenhos e os cartões disponibilizados, ou trabalhando com operações com frações.

Após o tempo de 15 minutos para resolverem, vamos convidar algum aluno a expor oralmente sua resolução. Caso ninguém se ofereça, explicaremos a resolução no quadro, um tempo de 10 minutos será gasto nessa exposição.

No próximo momento, vamos organizar as carteiras da sala para colocar as cinco atividades do circuito planejado abaixo. Pediremos que se organizem em grupos de cinco elementos, podendo ser de seis dependendo da quantidade de alunos, desde que haja uma quantidade par de grupos.

Explicaremos que organizamos uma competição entre os grupos valendo uma caixa de bombom como prêmio para ser dado no final da atividade para o primeiro colocado. Como prêmio de participação, cada aluno vai receber um bis de chocolate.

Em cada uma das cinco atividades selecionadas, estarão dois grupos competindo pelos pontos que cada atividade distribui ao vencedor.

Para cada atividade, separamos um tempo de 15 minutos e ao final do circuito, vamos contar os pontos de cada grupo e premiar os vencedores.

1°Momento: Apresentação do Dia Nacional da Matemática.

Primeiramente, vamos pedir que os alunos ouçam a breve explicação sobre o Dia Nacional da Matemática, para que entendam a importância desta data. Vamos antes disso, perguntar a classe se eles já possuem algum conhecimento a respeito desse dia que queira compartilhar. Um tempo de 10 minutos será gasto nessa apresentação, logo após vamos seguir para a atividade dos 21 jarros.

Júlio Cesar de Mello e Souza e Malba Tahan

Para falar sobre o Dia Nacional da Matemática, é essencial comentarmos sobre o professor, escritor e educador matemático brasileiro Júlio Cesar de Mello e Souza. Nascido no Rio de Janeiro em 06 de maio de 1895, Júlio Cesar começou a lecionar com apenas 18 anos, formou-se em Engenharia Civil, mas nunca exerceu sua profissão. Em vez disso, dava aulas de Matemática e buscava sempre criar técnicas de ensino com o objetivo de tornar essa disciplina mais atrativa para seus alunos, usando jogos, histórias, problemas e desafios matemáticos.

No ano de 1925, em suas primeiras tentativas de publicações, Júlio Cesar não obteve sucesso, enviou cinco textos ao editor do jornal “O Imparcial”, que nunca os notou. Então ele teve a ideia de reenviar esses textos usando um codinome, R. S. Slade, tomou o cuidado de criar um passado para esse nome, dizendo que pertencia a um famoso autor de Nova York. No dia seguinte, um de seus textos estava na primeira página.

Essa experiência fez com que Júlio Cesar, apaixonado pela cultura árabe, criasse outro pseudônimo para a publicação de suas obras, Malba Tahan. Para dar credibilidade ao novo personagem, ele escreveu uma pequena biografia: Ali lezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan, um famoso escritor árabe que nasceu na aldeia de Muzalit, em 1885, recebeu uma herança de seu pai, foi prefeito de El Medina, estudou em Istambul e no Cairo e faleceu em uma batalha em 1921.

Nesse mesmo ano, o professor Júlio Cesar publicou seu primeiro livro, chamado “Contos de Malba Tahan”. A primeira edição dessa obra ele assinou com seu próprio nome, tendo Malba Tahan apenas no título. Mas, em sua segunda edição, no entanto, o próprio Malba Tahan era o autor.

Em 1927, ele publicou seu segundo livro, “Céo de Allah”, também assinado pelo autor árabe, que acabou sendo premiado pela Academia Brasileira de Letras. Ainda na década de 20, no ano de 1929, publicou os livros “Amor de Beduíno” e “Lendas do Deserto”. Em 1931, o livro “Mil histórias sem fim” inaugurou o novo elenco de títulos que viriam a ser editados.

Júlio César escreveu ao longo de sua vida mais de 120 publicações, sendo 51 delas voltadas à Matemática. Sua obra de maior destaque veio em 1938 sendo “O homem que calculava”, livro que ele apresenta, por meio das proezas do personagem persa Beremiz Samir que se devota aos cálculos matemáticos, explorando uma infinidade de questões e desafios matemáticos, seguindo o estilo das narrativas do clássico Mil e Uma Noites.

Dia Nacional da Matemática e a Lei Federal n° 12.835

Foi em 1995 que um grupo de especialistas na vida e obra Malba Tahan, em comemoração ao centenário do grande escritor, propuseram a criação do dia da Matemática. Neste mesmo ano, foi aprovado pela Assembleia Legislativa do Rio de Janeiro e pela Câmara Municipal de São Paulo a criação da data comemorativa, no Estado do Rio de Janeiro e no Município de São Paulo.

Em 2004, a deputada Raquel Teixeira propôs um projeto de Lei ao Congresso Nacional para que o Dia Nacional da Matemática fosse celebrado em 6 de maio. A proposta não só homenageia a disciplina de Matemática, como **propõe um momento**

de reflexão acerca do ensinar e do aprender, bem como incentivos por parte do Governo para a promoção de atividades culturais e educativas.

Foi apenas em 2013, no dia 26 de junho, a presidenta Dilma Rousseff sancionou a lei 12.835, que instituiu oficialmente o Dia Nacional da Matemática. O dia 6 de maio foi escolhido em **homenagem a Malba Tahan**.

O tempo previsto para esta atividade introdutória é de aproximadamente 10 minutos. Ao fim da atividade, será aberto um espaço para possíveis dúvidas e perguntas dos estudantes sobre o assunto abordado. Em seguida, a turma será dividida em quatro grupos, que revisarão entre as atividades a seguir.

2° Momento:

- **Grupo 1: Problema dos 21 vasos e sua resolução.**

Para o problema dos 21 vasos, vamos separar um tempo de 20 minutos para apresentação da atividade e para que consigam resolver. Após esse período, um professor vai passar a resolução no quadro.

Atividade Introdutória: Problema dos 21 vasos.

Contaremos a história para os alunos, utilizando de materiais manipulativos para melhor compreensão do problema. O problema foi retirado do livro *O Homem que calculava*.

"Aqui estão, ó calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora os problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte: Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo:

- 7 cheios
- 7 meio cheios
- 7 vazios.

Querem agora dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó calculista, obter uma solução para este problema?"

Após os alunos ouvirem a história narrada por nós, disponibilizaremos cartões anexo I, para simbolizar os 21 vasos. Diremos então que agora eles serão os calculistas e que devem solucionar o problema dos vasos, de modo que a divisão obedeça às condições impostas no problema. Quando percebermos que uma maioria já obteve uma solução, solicitaremos que compartilhem suas soluções, e por fim terminaremos a história com o problema solucionado.

"Beremiz depois de meditar em silêncio durante dois ou três minutos, respondeu:

-A divisão dos 21 vasos, que acabais de apresentar, ó Xeque, poderá ser feita sem grandes cálculos. Vou indicar a solução que me parece mais simples.

Ao primeiro sócio caberão:

- 3 vasos cheios;
- 1 meio cheio;
- 3 vazios;

Receberá desse modo, um total de 7 vasos. Ao segundo sócio caberão:

- 2 vasos cheios;
- 3 meio cheios;
- 2 vazios;

Este receberá também 7 vasos. A cota que tocará ao terceiro será igual à do segundo isto é:

- 2 vasos cheios;
- 3 meio cheios;
- 2 vazios;

Segundo a partilha que acabo de indicar, cada sócio receberá 7 vasos e a mesma porção de vinho. Com feito, chamando de 2 a porção de vinho com um vaso cheio, e 1 a porção de vinho do vaso meio cheio. O primeiro sócio de acordo com a partilha, receberá:

2 + 2 + 2 + 1. Essa soma é igual a 7 unidades de vinho. E cada um dos outros dois sócios receberá:

2 + 2 + 1 + 1 + 1. E essa soma é também igual a 7 unidade de vinho.

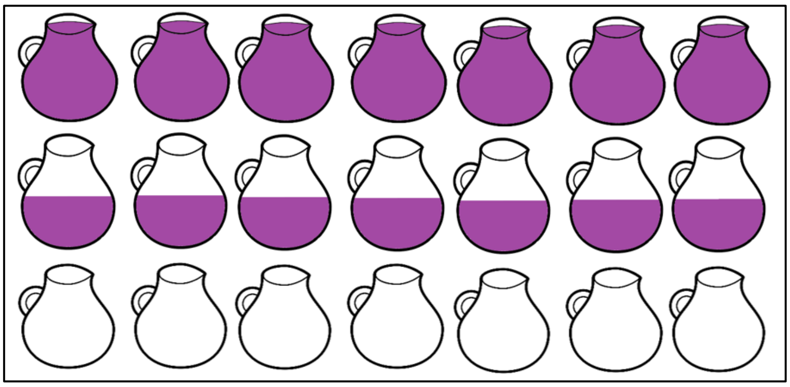
E isso vem provar que a divisão por mim sugerida é certa e justa. O problema que na aparência é complicado, não oferece dificuldade quando resolvido numericamente.

A solução apresentada por Beremiz foi recebida com muito agrado, não só pelo Xeque, como também pelos seus amigos damascenos.

- Por Alah! – Exclamou o jovem da esmeralda. – Esse calculista é prodigioso! Resolveu de improviso um problema que nos parecia dificílimo.

Cartão para auxílio:

Figura 111: Cartão para visualização do problema.



Fonte: Autores (2022).

3° Momento: Circuito de jogos e distribuição de prêmio.

Circuito de Jogos

Em seguida, vamos dividir a turma em no máximo cinco grupos e, cada grupo se ocupará com uma das atividades listadas abaixo. Daremos um tempo de 15 minutos para realizar cada atividade e depois solicitaremos que troquem entre os grupos, assim todos vão conseguir realizar uma atividade distinta. Se a turma tiver duas aulas disponíveis, planejamos aplicar todas as atividades abaixo, mas se a turma tiver apenas uma aula disponível, vamos aplicar apenas duas das atividades abaixo. Essas duas atividades seriam o Tangram e a Torre de Hanoi.

ATIVIDADE 1: Jogo Avançando com o resto.

Regra do jogo: o objetivo do jogo é chegar em primeiro lugar ao espaço com a palavra FIM. O grupo que chegar nessa mesa será redividido em duplas, a fim de agilizar as rodadas do jogo, os integrantes da dupla movimentam a sua ficha colocada, inicialmente, na casa com o número 43. Cada dupla, na sua vez, joga o dado e constrói uma divisão em que:

* O dividendo é o número da casa onde sua ficha está; e o divisor é o número de pontos obtidos no dado.

Em seguida, calcula-se o resultado da divisão e movimenta a própria ficha numa quantidade de vezes equivalente ao número de casas igual ao resto da divisão.

A equipe que efetuar o cálculo errado perde sua vez de jogar. Cada equipe deverá obter um resto que a faça chegar exatamente à casa marcada com FIM, sem ultrapassá-la.

Vence a equipe que chegar em primeiro lugar ao espaço com a palavra FIM. A equipe que ganhar vai receber 200 pontos como prêmio, e a equipe derrotada vai receber apenas 100 pontos. Caso os 15 minutos passe antes de haver um vencedor, ganha o grupo que estiver mais avançado na trilha.

Trilha dos restos:

Figura 112: Trilha dos restos.

Fonte: Professor Cristiano dos Santos (http://profcristianosantos.blogspot.com/2013/03/trilha-do-resto-operacoes-divisao.html).

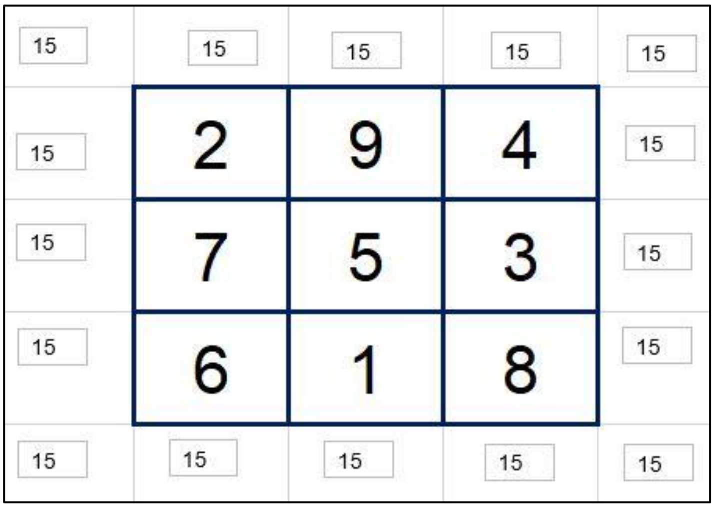
ATIVIDADE 2: Quadrados mágicos

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada com n linhas e n colunas, ela é composta por números e cada linha, coluna e diagonal possui o mesmo valor ao somarem. Além disso, em toda tabela, nenhum número é repetido. Esse jogo foi escolhido por ajudar no desenvolvimento do raciocínio lógico, na organização numérica em relação à utilização de operações matemáticas e por utilizar somente a operação de soma, da qual eles estão mais habituados. Nessa atividade os alunos devem buscar o posicionamento adequado, seguindo a regra da soma constante em cada linha, coluna e diagonal.

Um exemplo de quadrado mágico seria o de três linhas por três colunas, apresentado nove células para preenchimento com os algarismos de um a nove. A soma de cada linha, coluna e diagonal, resultaria sempre no número 15.

Quadrado mágico de lado três:

Figura 113: Quadrado mágico de lado três:



Fonte: Autores (2022).

Com essa atividade, os alunos poderão perceber, com ou sem interferência do docente, da relação numérica chamada paridade. Essa relação é responsável pelas seguintes situações:

- A soma entre dois números pares resulta em um número par;
- A soma entre dois números ímpares resulta em um número par;
- A soma entre um número par e um número ímpar resulta em um número ímpar;

Conhecendo a paridade, a complexidade que essa atividade inicialmente apresentava, se torna mais fácil, uma vez que se sabe que as somas devem resultar sempre em 15, precisa vir da soma entre dois números que resulta em um número par com apenas um número ímpar. Em um quadrado com quatro linhas e quatro colunas, devemos alocar as 16 células com números do um ao dezesseis, com a soma de cada linha e coluna resultando no número 34. Eles podem somar em cada linha e coluna dois números pares com dois números ímpares.

Quadrado mágico de lado quatro:

Figura 114: Quadrado mágico de lado quatro.

34	34	34	34	34	34
34	1	14	15	4	34
34	12	7	6	9	34
34	8	11	10	5	34
34	13	2	3	16	34
34	34	34	34	34	34

Fonte: Autores (2022).

Essa atividade fará parte do percurso de cinco atividades que será disputada entre dois grupos. Cada grupo receberá dois quadrados mágicos, um de três por três e outro e quatro por quatro. Os quadrados mágicos foram quase todos completados, faltando apenas cinco espaços nos dois tipos de quadrados. Por terem que ser resolvidos também pelas diagonais, restando apenas uma solução para cada quadrado.

Ganha o grupo que completar e entregar os dois quadrados mais rápido. Essa atividade vai valer 100 pontos, com quinze minutos de duração no total. Caso um grupo, no final desse tempo tenha terminado apenas um quadrado mágico, eles vão receber 50 pontos, e caso não tenham terminado nenhum até o final do tempo, o grupo não vai receber pontos.

ATIVIDADE 3:Tangram

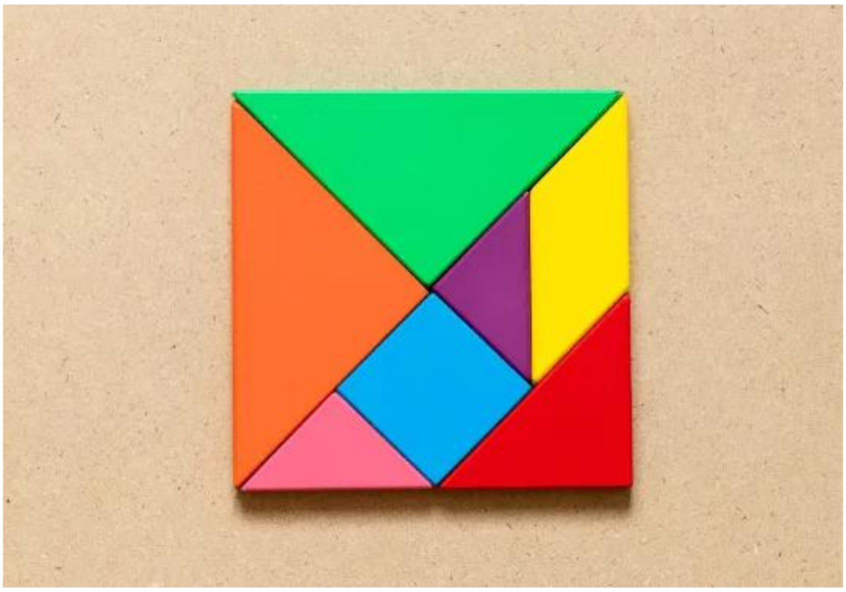
O Tangram é considerado um jogo de origem chinesa; é um quebra cabeça composto de sete peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo), com as quais é possível montar diversas figuras. Embora sua origem seja incerta, uma lenda diz que se originou quando um imperador quebrou um espelho, e ao ajuntar os pedaços percebeu que podia formar várias figuras. Para usar o Tangram não é necessário grandes habilidades, apenas tempo, paciência e criatividade, pois com ele é possível formar mais de 1000 figuras. As únicas regras são: todas as peças devem ser utilizadas nas composições e, não é permitida a sobreposição de peças.

Para a utilização no projeto do Dia Nacional da Matemática, propomos desafiar os alunos participantes a confeccionar algumas figuras com as peças do Tangram.

Por exemplo, pediremos para que montem um barco, e então verificamos se a figura parece um barco. Outro desafio seria o de pedir que montem a figura do Tangram com o menor perímetro possível, ou ainda perguntar informações sobre as peças do Tangram. Afinal, dos cinco triângulos, dois são grandes, um médio e, dois pequenos e, seus tamanhos são proporcionais, pois, o médio é metade do grande e, o pequeno é metade do médio.

Vamos trabalhar essa atividade duas vezes, usaremos duas mesas na sala para trabalhar com a atividade de Tangram, e em cada mesa terá uma figura diferente para montar. A pontuação do Tangram será atribuída 100 pontos a equipe que primeiro concluir o desafio.

Figura 115: Tangram.



Fonte: https://escolakids.uol.com.br/matematica/tangram.htm

ATIVIDADE 4: Torre de Hanói

A torre de Hanói é um jogo de estratégia capaz de desenvolver raciocínio lógico e o desenvolvimento da memória. O jogo consiste em uma base onde estão fixados três pinos A, B e C na posição vertical, e um certo número de discos de diâmetros diferentes, com um orifício no centro. Para iniciar o jogo todos os discos devem estar no primeiro pino A, com todos os discos empilhados sobre ele em ordem decrescente de tamanho, com o menor disco acima de todos. O objetivo do jogo é passar todos os discos para o pino C, com a ajuda do pino B obedecendo as seguintes regras O jogo constituído por três pinos é o mais simples, porém essa quantidade pode variar, podendo deixar jogo mais difícil à medida que for aumentado a quantidade de discos:

- Pode-se mover apenas um disco por vez.
- Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco maior.

Figura 116: Torre de Hanói.

Fonte: Disponível em: https://www.matematica.pt/fun/torre-hanoi.php. Acesso em: 14 abr. 2022.

A torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento de situações problemas.

Será atribuída uma pontuação de100 pontos para o grupo que concluir e 50 pontos para o grupo que não concluir o desafio.

CRONOGRAMA

O projeto será composto de 8 horas-aula, conforme a tabela a seguir.

Manhã	Tarde
8ºA	6ºC
8ºA	6ºC
9ºB	7ºB
7ºA	7ºB
9ºA	6ºA

RESULTADOS ESPERADOS

A partir desse projeto, pretendemos conscientizar os alunos sobre o Dia da Matemática, ressaltando a importância do educador e escritor Júlio Cesar de Mello e Souza na criação dessa data. Além disso, através das atividades de sua obra “O homem que calculava” esperamos que vejam a aplicação das operações básicas em problemas diários e a partir das atividades do circuito, possam melhorar a base matemática sobre essas quatro operações, enquanto desenvolvem o raciocínio lógico e se divertem.

REFERÊNCIAS

DANTAS, Tiago. Tangram. **Mundo educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/curiosidades/tangram.htm. Acesso em: 14 abr. 2022.

DIA NACIONAL DA MATEMÁTICA, um caminho para a inclusão social e a melhoria do ensino. Disponível em: https://www.gov.br/cnpq/pt-br/assuntos/noticias/destaque-em-cti/dia-nacional-da-matematica-um-caminho-para-a-inclusao-social-e-a-melhoria-do-ensino. Acesso em: 19 abr. 2022.

GOUVEIA, Rosimar. Dia Nacional da Matemática. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/dia-nacional-da-matematica/. Acesso em: 19 abr. 2022.

JOGO AVANÇANDO COM O RESTO. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/avancando-com-o-resto/. Acesso em: 14 abr. 2022.

LOPES, Tânia Isabel Duarte. **A História dos Quadrados Mágicos**. Departamento de Matemática. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20%C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf. Acesso em: 15 abr. 2022.

MUSEU DE MATEMÁTICA DA UFMG. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/museu/> Acesso em: 14 abr. 2022.

NOÉ, Marcos. Solucionando quadrados mágicos. **Brasil Escola**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/solucionando-quadrados-magicos.htm. Acesso em: 15 abr. 2022.

SANTANA, Ana Lucia. Malba Tahan. **Info Escola**. Disponível em: https://www.infoescola.com/biografias/malba-tahan/. Acesso em: 19 abr. 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. 06 maio Dia Nacional da Matemática. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/datas-comemorativas/06-maio-dia-nacional-matematica.htm. Acesso em: 19 abr. 2022.

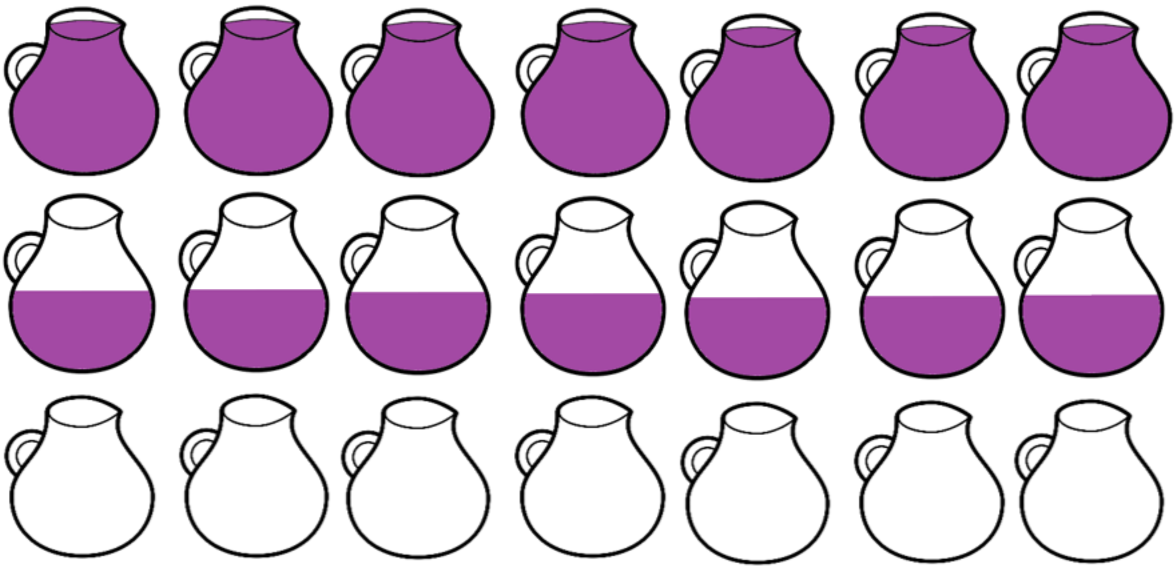
TAHAN, M. **O Homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2010.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. São Paulo: Círculo do Livro AS, 1987.

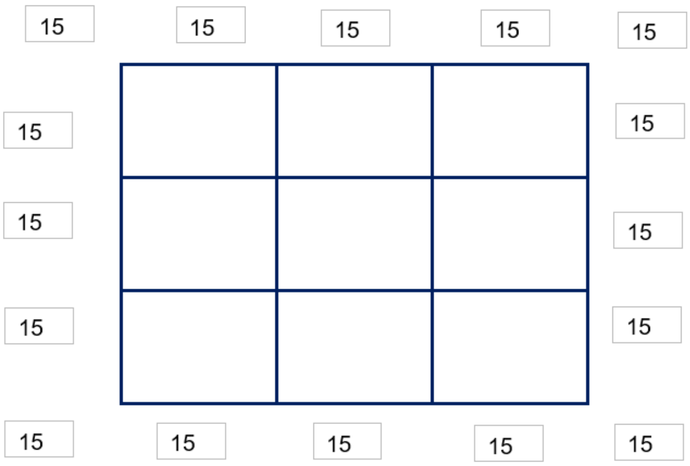
VIDA E OBRA MALBA TAHAN. Disponível em: https://www.malbatahan.com.br/contato/. Acessado em: 19 abr. 2022.

Apêndice:

A)



B)



C)

34	34	34	34	34	34
34					34
34					34
34					34
34					34
34	34	34	34	34	34

D)

16. **Relatório do Dia Nacional da Matemática**

Projeto do Dia Nacional da Matemática

Relatório da execução do projeto

GRUPO DE ESTAGIÁRIOS: André L. *Z.* da Cruz; Cleison R. Sotel; Fernanda Guerra; Jheniffer Rafaelly Vieira; William F.de O. Pinheiro.

PROFESSORA ORIENTADORA: Arleni Elise Sella Langer
PROFESSORAS REGENTES: Almira Vieira Berti e Rejane Maria Savegnago.
COLÉGIO: Colégio Estadual Olinda Truffa de carvalho.
DATA: 06/05/2022.

HORÁRIO(S) DA MANHÃ:
7h10min – 8h50min Sala 5; turma: 8° ano A, duas horas-aula;
8h50min – 9h40min Sala 12; turma: 9° ano B, uma hora-aula;
9h55min – 10h45min Sala 15; turma: 7° ano A, uma hora-aula;
10h45min – 11h35min Sala 11; turma: 9° ano A, uma hora-aula:

HORÁRIO(S) DA TARDE:
13h10min – 14h50min Sala 5; turma 6° ano A, duas horas-aula;
14h50min – 15h40min Sala 9; turma 7° ano B, uma hora-aula;
15h55min – 17h35min Sala 3; turma 6° ano A, duas horas-aula;

Abordagens no projeto:
Para cada turma, seguimos um mesmo roteiro de aula, divulgando o Dia Nacional da Matemática, sua origem como sendo uma homenagem ao Professor Julio Cesar de Mello e Souza. Trabalhamos então o problema dos 21 vasos, presente no livro “O Homem que Calculava” e propusemos um circuito de jogos em turmas com duas aulas como um momento de recreação, trabalhando a matemática de forma divertida e interessante.

TURMA: 8° ano A, duas horas-aula, 7h10min – 8h50min Sala 5

A primeira turma que seguimos apresentando o projeto foi o 8° ano A, na sala 5. Essa turma possuia duas aulas de 50 minutos, então conseguimos seguir com toda a programação do projeto. A turma era composta por 28 alunos e a regente era a professora Almira Vieira.

Em uma primeira impressão, a turma ficou agitada com a nossa chegada trazendo os jogos. Começamos nos apresentando para a turma como alunos do terceiro ano da Unioeste do curso de Licenciatura em Matemática, em seguida, pedimos que todos os discentes se apresentassem falando seus nomes.

Todos eles se apresentaram, e no momento seguinte, um estagiário começou a falar sobre o Dia Nacional da Matemática, comentando sobre sua instauração em todo território nacional em 2013 pela presidenta Dilma Rousseff que sancionou a Lei de n° 12.835. Abordamos então um breve resumo da vida de Julio Cesar de Mello e Souza, o surgimento do nome Malba Tahan e da sua principal obra, “O Homem que Calculava”. Durante a explicação, os alunos se mantiveram em silêncio, ouvindo a história de origem da data. Na sequência pedimos que resolvessem o problema dos 21 vasos, que também está presente nesse livro. Uma das estagiárias seguiu apresentando o enunciado desse problema, respondendo as dúvidas que os discentes tinham, tais como, se poderiam quebrar o vaso de vinho ou abri-lo ou deixar um vaso fora da divisão.

Antes deles resolverem o problema, dividimos a sala em quatro grupos de sete elementos. Vale destacar que um aluno não queria fazer grupo com determinado aluno, mas depois ele aceitou participar. Após os grupos serem formados, entregamos para cada, um pacote contendo 21 figurinhas que representava os sete vasos cheios, sete vasos meio cheios e sete vasos vazios.

Demos um tempo de 15 minutos para os grupos resolverem e todos conseguiram, alguns grupos apresentaram certa dificuldade na separação dos vasos, mas depois de aconselharmos a pensar em 1 litro em cada vaso cheio e um vaso meio cheio com meio litro, logo conseguiram apresentar uma resolução.

Convidamos os grupos a falarem suas respostas e tivemos dois resultados distintos, mas ambos estavam corretos. O grupo vencedor dessa atividade, conseguiu 100 pontos, e os outros grupos ganharam 50 pontos.

Em seguida, pedimos que os alunos saíssem da sala com calma e se dirigissem para o refeitório onde preparamos quatro mesas com as atividades programadas, sendo: Torre de Hanoi, Trilha dos restos, Quadrados mágicos e Tangram. Em cada atividade, havia um estagiário que explicava o objetivo, tirava dúvidas, orientava o desenvolvimento dos alunos com questionamentos, como por exemplo, nos quadrados mágicos, questionando se a soma feita por eles estava correta. Todos os grupos conseguiram realizar as atividades, mas nem todos os grupos conseguiram completar elas totalmente. No quadrado mágico, houve um grupo que errou a posição dos números no quadrado magico quatro por quatro. Tivemos dois grupos que tiveram o mesmo resultado, então precisamos pensar em uma forma de decidir um vencedor, escolhemos levar em conta a quantidade de casas que conseguiram avançar no jogo trilha dos restos.

Ao voltarmos para a sala de aula, escrevemos no quadro o resultado do circuito e indicamos o grupo vencedor. Todos os alunos receberam um pirulito como agradecimento por participar da aula e cada aluno do grupo vencedor recebeu um bombom como prêmio. Terminamos nossa aula faltando poucos minutos para às oito horas e quarenta minutos, nos despedimos da sala e partimos em direção a sala 12 para trabalhar com o 9° ano B.

Turma: 9° ano B, uma hora-aula, 8h50min – 9h40min Sala 12

Já na sala do 9° ano B, os alunos ficaram um pouco alterados com nossa chegada, sendo necessário que a professora regente Rejane pedisse que a sala ficasse em silêncio. Com a sala controlada, seguimos um roteiro semelhante ao da aula anterior, mas no decorrer da aula, tivemos que realizar algumas alterações.

Começamos nos apresentando como alunos da Unioeste e pedimos que eles se apresentassem também falando o nome. Em seguida, um estagiário comentou sobre o Dia Nacional da Matemática, e assim como na outra sala os alunos ouviram a explicação.

A sala possuía 26 alunos, separamos eles em cinco grupos, sendo quatro deles com cinco educandos, e uma menina que escolheu trabalhar sozinha no problema dos 21 vasos. Entregamos os envelopes com as 21 figurinhas de vasos cheios, meio cheios e vazios e demos um tempo de 15 minutos para a resolução do problema. Enquanto pensam na resolução, todos os estagiários estavam andando pela sala atendendo possíveis dúvidas e orientando através de questionamentos. O último grupo a finalizar estava anteriormente tentando separar o vinho para cada amigo em uma quantidade inteira, mas com nossa orientação, logo perceberam que isso não era necessário. Sabendo que a quantidade não precisaria ser inteira, tentaram verificar se com dois litros e meio de vinho já seria suficiente para a separação, quando chegaram a conclusão que não era, decidiram aumentar um litro para cada amigo, chegando na resolução do problema.

Todos os cinco grupos conseguiram finalizar a tarefa, mas apenas uma única forma de solução foi encontrada pela sala. Importante citar que durante essa aula, a professora orientadora precisou sair por motivos familiares, retornando com nossa observação no período da tarde.

Por conta de ser apenas uma aula e já estar perto do horário do recreio, informamos no quadro o grupo vencedor e presenteamos eles com bombons, todos os alunos em seguida receberam um pirulito como agradecimento por participar, decidimos entre nos estagiários de dar dois pirulitos para a aluna que realizou a atividade sozinha pela sua dedicação. Saímos da sala de aula com o sinal do recreio e retornamos com o projeto nos dois últimos períodos.

Turma: 7° ano A, uma hora-aula, 9h55min – 10h45min Sala 15

As 9h55min foi realizado o projeto no sétimo ano turma A sobe responsabilidade da professora Almira, que foi a terceira turma em que realizamos o projeto no dia, por ser a primeira aula depois do intervalo, demorou um pouco, para que todos os alunos estivessem presentes, esperamos até que a maioria estivesse na sala, para então nos apresentarmos, então contamos aos alunos, o motivo de estarmos ali, naquele dia em especial. Após nos apresentarmos e, contarmos um pouco da história do Júlio Cezar de Mello e Souza (Malba Tahan), sua importância para educação matemática no Brasil, como a escola em que estudam, no início se chamava colégio Malba Tahan, explicamos que essa data foi escolhida para o homenagear.

Após a introdução, começamos a dinâmica da história dos 21 vasos, onde contamos a história, e ilustramos mostrando as garrafinhas cheias de água colorida, que simbolizava o vinho, então dividimos os alunos em grupos, para que eles começassem a pensar sobre o problema, apesar de alguns atritos entre os alunos, que não queriam estar no mesmo grupo, nossa posição foi firme e permaneceu o nosso critério de que se agrupassem por proximidade não por afinidade.

Depois do agrupamento, distribuímos para cada grupo 21 figuras de vasos, sendo sete cheios, sete meio cheios e sete vazios, e auxiliamos os grupos na resolução, escutando o raciocínio de cada um, e respondemos seus questionamentos, com perguntas como “o que queremos dividir entre os três amigos?”, “Qual é o total de vinho, quanto cada um deve ganhar?”, “Quantas metades existem em cada vaso?”. Os alunos demonstraram bastante interesse em participar da atividade, e ficaram satisfeitos em conseguir resolver o problema, acredito que a experiência tenha sido significativa, no que diz respeito a conseguir compreender o problema e resolvê-lo.

Turma: 9° ano A, uma hora-aula, 10h45min – 11h35min Sala 11

Fomos até a sala 11 que estavam os alunos do 9° ano turma A, a presença dos estagiários influenciou o comportamento da classe, alguns já exclamando que a turma deveria ganhar prêmios assim como as outras turmas, visto que a aula era após o recreio e, os demais alunos haviam comentado sobre o projeto que estávamos aplicando naquela manhã com as turmas que tinham aula matemática. Assim muito entusiasmados com o possível prêmio, eles se dispersam e criam um ambiente conturbado, logo que todos estavam presentes a professora Rejane os acalmou, passamos então para as atividades programadas.

Durante a exposição da história do dia da matemática, bem como de Júlio Cesar de Mello e Souza (Malba Tahan), eles demostraram estar interessados no assunto. Quando aberto a posicionamentos por parte dos alunos, em relação ao Dia da Matemática, alguns levantaram dúvidas, se nesta data era comemorado o aniversário de Albert Einstein, se este era o inventor da matemática ou ainda exclamaram ser o dia do primeiro professor de matemática. Um dos estagiários tomou a palavra e explicou todas as dúvidas, apresentou brevemente que em outros países eram comemorado este dia em outras datas e outras abordagens para o dia. Finalizado a história do atual dia, passamos para a apresentação da problematização.

O problema dos 21 vasos, conforme previsto no projeto, uma das estagiárias apresentou a eles, contextualizando o problema, e explicando que eles terão que resolvê-lo. Dividimos em sete grupos de quatro participantes, tendo presentes em aula um total de 28 alunos. Após todos posicionados em grupos, distribuímos os cartões para auxiliar a resolução. Em seguida começaram a buscar soluções para o problema, nós seguimos circulando pela sala, buscando tirar possíveis dúvidas dos grupos; alguns grupos tinham mais dificuldades, eles precisavam de um maior tempo de auxílio dos estagiários, que se faziam presente buscando não entregar a solução, mas ajudá-los a chegarem sozinhos.

Passado algum tempo superior ao estimado por nós todos os grupos chegaram em uma solução. Para a premiação foi adotado que o grupo que primeiro solucionar o problema seria vencedor, contudo, houve dois grupos que apresentaram um conflito, não convencidos da decisão nossa de que um dos grupos teria solucionado primeiro, insistiram que tinham vencido, como tínhamos prémios sobrando, decidimos premiar ambos os grupos, porém elegendo um dos grupos como vencedor, levando em consideração as observações dos estagiários. Após a entrega dos pirulitos pela participação e os bombons pela vitória, agradecemos a participação e demos por encerrado o projeto naquela sala, como planejado o horário da aula finalizou-se também neste momento.

Turma 6° ano C, duas horas-aula, 13h10min – 14h50min Sala 5

Iniciamos a tarde desenvolvendo o projeto na sala do 6° C da professora Rejane, na qual havia 21 alunos presentes, tínhamos disponíveis duas horas/aulas para execução. A turma estava bem agitada com nossa presença, e levou alguns minutos até que se acalmassem e se sentassem para nos ouvir. Percebemos que havia uma professora PAEE[3] responsável por cinco alunos, todos se sentavam ao redor dela com o objetivo de receberem auxílio durante as aulas.

O início ocorreu de maneira semelhante ao das demais turmas, adaptamos a linguagem usada por se tratar de alunos menores. Após contarmos a história dividimos os alunos em quatro grupos de quatro alunos, e um grupo de cinco. Entregamos as figurinhas e solicitamos que pensassem em uma solução, explicamos o que não poderia ser feito durante a divisão e enfatizamos que todo o processo deveria ser justo.

Nesta sala surgiu uma solução distinta das apresentadas pela manhã, um grupo solucionou o problema da seguinte forma: o primeiro amigo recebeu três vasos vazios, três vasos cheios, e um vaso pelo meio. O segundo amigo recebeu cinco vasos pelo meio, um vaso cheio e um vaso vazio. O terceiro e último amigo recebeu uma divisão igual a do primeiro. Após isso, organizamos no quadro uma representação e atribuímos pontos ao grupo vencedor, solicitamos então que de maneira calma e organizada os alunos se encaminhassem ao refeitório da escola, para a realização do circuito de atividades.

---

[3] Professor de Atendimento Educacional Especializado

Cada grupo se ocupou de uma atividade, e nos momentos certos eram encaminhados para a atividade seguinte de modo que todos os grupos participassem de todos os jogos. Uns minutos antes do final da segunda aula, retornamos à sala e fizemos a contabilização dos pontos adquiridos nos jogos, distribuímos os pirulitos a todos e os bombons para o grupo vencedor. Agradecemos a participação e nos encaminhamos para a próxima turma.

Turma 7° ano B, uma hora-aula, 14h50min – 15h40min Sala 9

Chegamos à sala do 7° B da professora Almira com 24 alunos presentes, os quais já esperavam por nós visto que a professora os havia preparado no dia anterior, explicando que viríamos. Os alunos indagaram imediatamente que hora nós os levaríamos para o refeitório, já que viram a turma anterior saindo e, a professora disse que seria um dia diferente. Explicamos então que eles deveriam se acalmar e esperar o momento certo para ir ao refeitório. A professora reforçou nossa fala e pediu que se sentassem e ficassem em silêncio. Após esse momento iniciamos de forma semelhante as demais aulas do projeto.

Dividimos a sala em quatro grupos com seis alunos cada, e solicitamos que resolvessem o problema dos 21 vasos. Os alunos demonstraram facilidade na resolução e poucos minutos depois já tínhamos o grupo vencedor, atribuímos uma pontuação a esse grupo e então explicamos o que aconteceria em seguida.

Visto a proximidade com o horário do intervalo, iniciamos o circuito de jogos na sala mesmo com o intuito de levá-los para o refeitório após o lanche. Dentro da sala conseguimos realizar apenas uma rodada e, então os alunos foram liberados para o intervalo. Na volta esperamos os minutos necessários para a limpeza das mesas e então encaminhamos os alunos ao refeitório.

Uns minutos antes do fim da aula, retornamos para a sala, atribuímos os pontos conquistados por cada grupo no circuito de atividades e distribuímos os pirulitos e bombons ao grupo vencedor. Agradecemos a professora Almira pôr a disponibilidade das aulas para que pudéssemos desenvolver nosso projeto. Nos encaminhamos então para a última aula do dia.

Turma 6° ano A, duas-hora aula, 15h55min – 17h35min Sala 3

Por fim, a última aula do projeto foi desenvolvida na sala do 6° B da professora Rejane, havia 24 alunos presentes. Os alunos estavam demasiadamente agitados no início da aula e, só vieram a se acalmar, quando a professora chamou a atenção de maneira enérgica. Durante o desenvolvimento dessa aula, tivemos alguns problemas em relação ao comportamento dos alunos, tivemos a necessidade de chamar a atenção constantemente. Após esse momento inicial, a contação da história e a explicação do porquê do dia da matemática ocorreu de maneira semelhante as demais aulas.

Organizamos a sala em grupos de seis alunos, e disponibilizamos o material de auxílio para resolver o problema proposto. Um dos grupos que estava ao fundo foi extremamente rápido na solução, e logo se manifestou positivamente por ter alcançado tal feito. Realizamos a formalização da resolução no quadro, e distribuímos os pirulitos e bombons para a equipe vencedora. Agradecemos a professora Rejane pela disponibilidade de suas aulas para o desenvolvimento do nosso projeto.

17. Considerações finais

Este relatório final é efetivamente o culminar de um intenso e árduo trabalho que foi a aplicação do projeto PROMAT oferecido pela Unioeste e a realização das atividades alusivas ao Dia Nacional da Matemática, executadas nas escolas nas quais faremos o Estágio de Regência . O presente projeto foi concluído, deixando para nós os estagiários, as mais diversas experiências de uma sala de aula, diversas contribuições serão levadas a diante, ao longo de nossa carreira profissional, exemplos e práticas foram observadas e aplicadas no projeto. E com o auxílio e orientação da orientadora, pudemos concluir que tivemos avanços significativos em relação às metodologias que pretendemos aplicar em nossas futuras aulas, para os mais diversos discentes.